Bolita que rueda por un plano inclinado

Manuel Gutiérrez Trujillo
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Una de las principales dificultades con la que nos encontramos cuando preparamos un determinado experimento de laboratorio, es que al momento de analizar los resultados obtenidos, en ocasiones el valor que predice el modelo teórico difiere en un porcentaje significativo del valor experimental. Esto por lo general nos lleva a pensar en aquellas fuentes de error que no se tuvieron presentes y que sin duda son la causa de que la "experiencia no resulte", razón por la cual no la realizamos con nuestro alumnos.

Lo anterior en muchos casos es cierto, es decir las incertezas asociadas a las mediciones inciden de manera significativa sobre el valor que se pretende medir, sin embargo en otros casos el problema radica en que al momento de plantear el modelo teórico simplificamos demasiado la situación. La omisión a que se hace mención no es por lo general por desconocimiento del tema, es más bien que damos por sabido que no afectará al resultado final y es que pocas veces nos preocupamos de cuantificar su valor. Ejemplos: la fuerza de roce entre la cinta y el timer, el momento de inercia de las ruedas del carro, la capacidad calorífica del calorímetro o termo, etc.

Un ejemplo sencillo de realizar y que tiene que ver con lo anterior, es el experimento de una bolita que rueda por un plano inclinado, en donde los materiales y el tipo de mediciones a realizar son bastante simples y sencillos.

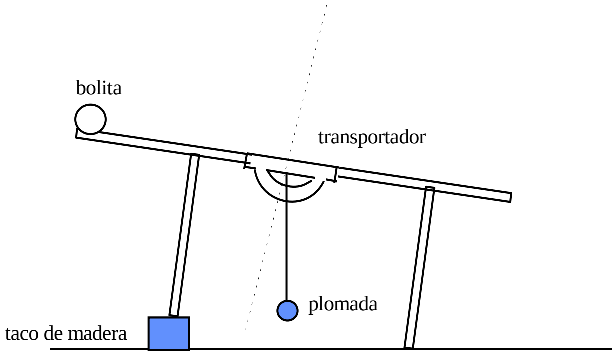
OBJETIVO:

Determinar experimentalmente el valor de la aceleración de gravedad a través de una bolita que rueda por un plano inclinado.

MATERIALES:

- 1 bolita (acero)
- 1 cronómetro
- 1 mesón de trabajo
- 1 plomada con hilo
- 1 transportador
- 1 clavo chico
- 1 regla
- scotch
- tacos de madera dif. tamaños
- papel milimetrado

MONTAJE:



(fig.1)

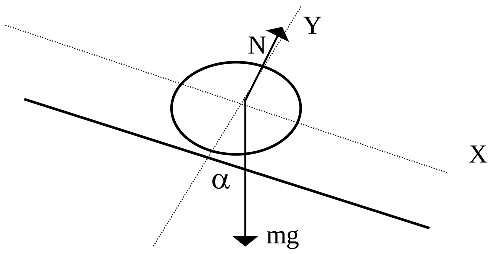
Al analizar el movimiento de una bolita que rueda por un plano inclinado desde el punto de vista dinámico, si despreciamos la fuerza de roce, las únicas fuerzas presentes son el peso de la bolita (mg) y la reacción ejercida por la superficie (N). Al coordenar tal como indica la fig.2 y al aplicar la segunda ley de Newton en el eje X, se tiene:

$$\Sigma F = m\cdot a \qquad (1)$$

de donde:

$$m\cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot a \qquad (2)$$

$$\underline{a} = g \cdot \underline{\text{sen}\ \alpha} \qquad (3)$$



(fig.2)

Si en la expresión (3) consideramos “a” y “senα“ como variables, ésta toma la forma de la ecuación de la recta que pasa por el origen:

$$Y = m \cdot X \qquad (4)$$

El experimento consiste básicamente en variar el ángulo de inclinación del mesón y medir en cada caso la aceleración con que cae la bolita, para luego graficar las variables a v/s senα, ya que la expresión (3), tal como se mencionó, predice una recta como gráfica, con “senα“ como variable independiente y “a” como la variable dependiente y en donde la pendiente corresponde al valor de la aceleración de gravedad.

Cabe señalar que tanto el ángulo como la aceleración son fáciles de medir. El ángulo se puede medir de manera simple a través del transportador, el cual se fija con scotch a la mesa, cuidando que el borde de éste coincida con el del mesón (ver fig. 1). La plomada se fija con el clavo al mesón en el centro del transportador.

Si la bolita se suelta del extremo superior del mesón y se cronometra el tiempo en alcanzar el extremo inferior, al aplicar la expresión válida para el movimiento uniformemente acelerado:

$$x = v_o\cdot t + (a\cdot t^2)/2 \qquad (5)$$

al despejar la aceleración, teniendo presente que la velocidad inicial es nula, se tiene:

$$a = (2 \cdot x)/ t^2 \qquad (6)$$

donde x corresponde a la distancia recorrida por la bolita, es decir la longitud del plano inclinado y que en este caso era de 150 cm.

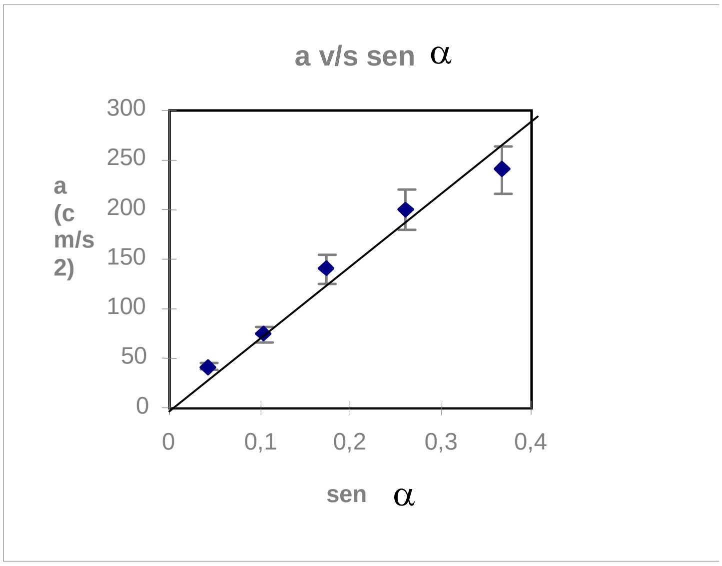
Se recomienda repetir la medición del tiempo al menos tres veces para cada ángulo de inclinación, de esta manera se consigue determinar tres valores de aceleración, de los cuales el valor a graficar corresponde al promedio y la incerteza asociada se obtiene a través del rango de variación: el valor mayor menos el menor dividido por dos.

En la experiencia realizada se usaron ángulos de inclinación de 3º, 6º, 10º, 15º y 21º, repitiéndose cada medición cinco veces, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla de valores

Ángulo de Inclinación	Tiempo de caída (seg.)	Aceleración (cm/seg ^{2})	Acel. prom. (cm/seg ^{2})	sen α
	2,5	48,0		
	2,8	38,3		
3º	2,7	41,2	42± 5	0,052
	2,7	41,2		
	2,7	41,2		
	2,0	75,0		
	2,0	75,0		
6º	1,9	83,1	74±8	0,105
	2,1	68,0		
	2,1	68,0		
	1,5	133,3		
	1,5	133,3		
10º	1,4	153,1	140±20	0,174
	1,6	117,2		
	1,4	153,1		
	1,3	177,5		
	1,2	208,3		
15º	1,2	208,3	200±20	0,262
	1,2	208,3		
	1,3	177,5		
	1,2	208,3		
	1,1	247,9		
21º	1,1	247,9	240±20	0,367
	1,1	247,9		
	1,1	247,9		

Gráfico:



En el gráfico, al determinar la pendiente, ésta arroja un valor aproximado de 733 cm/seg^2, el cual al ser comparado con el valor esperado (g = 980 cm/seg^2), se obtiene un 25% de diferencia entre el valor teórico y el experimental.

Al analizar las causas de tal diferencia, nos podremos dar cuenta que en el modelo teórico planteado, al no considerar la fuerza de roce, estamos asumiendo que la bolita mientras baja por el plano inclinado, solo tiene movimiento de traslación y no de rotación, es decir no estamos considerando el momento de inercia de la bolita, el que para una esfera maciza como en este caso es de $2/5mr^2$.

Al plantear la situación para el eje X y considerando la fuerza de roce (fr) presente, como así también el movimiento de rotación de la bolita, se tiene:

ΣFx: $$m\cdot g\cdot sen\alpha - fr = m\cdot a \qquad (7)$$

Como la fuerza de roce (fr) existente entre la superficie y la esfera es la que ejerce "torque", o sea es la causante que la bolita además del movimiento de traslación también posea movimiento de rotación y que fue el que no se consideró al plantear el modelo anterior, al aplicar la ecuaciones de torque y recordando que:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha \qquad (8)$$

en donde:

τ es el torque aplicado
I es el momento de inercia de la bolita
α es la aceleración angular de la bolita

se tiene: $$r \times F = I\cdot\alpha \qquad (9)$$

$$r\cdot fr = I\cdot\alpha \qquad (10)$$

pero $$\alpha = a/r \qquad (11)$$

luego $r \cdot fr = 2/5 m \cdot r^2 \cdot a/r$ (12)

simplificando $fr = 2/5 m \cdot a$ (13)

Si la expresión anterior la reemplazamos en (7), tenemos:

$$m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha - 2/5 m \cdot a = m \cdot a \qquad (14)$$

Al simplificar y despejar la aceleración, tenemos que:

$$a = 5/7 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad (15)$$

Si en la expresión (15) consideramos “a” y “senα“como variables, ésta toma la forma de la ecuación de la recta que pasa por el origen:

$$Y = m \cdot X \qquad (16)$$

La expresión (15), al igual que el primer modelo, predice una recta que pasa por el origen y en donde la pendiente teórica es ahora “5/7g”, o sea 700 cm/s^2, valor que al comparar con el obtenido mediante la pendiente del gráfico: 733 cm/s^2, difiere en tan solo un 5 % aproximadamente.

Es importante observar, que el último punto graficado es el que se “escapa” de manera más notoria que el resto, ésto puede deberse a que al aumentar el ángulo de inclinación, aumenta la imprecisión en las mediciones del tiempo, pues la bolita demora cada vez menos en caer (1 seg. aproximadamente), además al ser mayor la inclinación, la bolita más que rodar propiamente tal, más bien <u>resbala</u> por el plano.