Cabri-geométrico en un problema de Apolonio

Juana Contreras S.
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

El clásico problema atribuido al gran geómetra Apolonio de Perga (siglo III A.C.), conocido como Problema de Apolonio, consiste en *construir las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas.*

Este problema aparece enunciado y resuelto en el Libro II de su gran obra Cónicas, cuya solución se basa en resultados y construcciones obtenidas por Euclides y en construcciones realizadas por el propio Apolonio, presentadas en los Libro I y II de la obra mencionada, de problemas relacionados con construcciones de circunferencias determinadas por tres condiciones, cuyo enunciado[1] más general es el siguiente:

Dados tres objetos, que pueden ser o bien un punto, una recta o una circunferencia, construir las circunferencias que pasen por el (los) punto dado, y/o tangentes a la(s) recta dada y/o tangentes a la(s) circunferencia dada

Representando un punto por P, una recta por R y una circunferencia por C, se obtienen de este enunciado los siguientes diez problemas[2]:

PPP	(1)	circunferencia que pasa por tres puntos dados
PPR	(2)	circunferencia que pasa por dos puntos dados y tangente a una recta dada
PPC	(2)	circunferencia que pasa por dos puntos y tangente a una circunferencia dada
RRR	(4)	circunferencia tangente a tres rectas dadas
PRR	(2)	circunferencia que pasa por un punto y tangente a dos rectas dadas
PCC	(4)	circunferencia que pasa por un punto y tangente a dos circunferencia dadas
PRC	(4)	circunferencia que pasa por un punto y tangente a una circunferencia y a una recta, dadas
RRC	(8)	circunferencia tangente a dos rectas y a una circunferencia
RCC	(8)	circunferencia tangente a una recta y a dos circunferencias dadas
CCC	(8)	circunferencia tangente a tres circunferencias dadas

La resolución de estos problemas[3] ofrece un interesante método de construcciones sucesivas, siendo el de mayor interés el caso CCC donde los tres objetos son circunferencias, que corresponde al problema de Apolonio, cuyo número de soluciones depende de las diferentes posiciones relativas de las tres circunferencias dadas, el que varía desde ninguna hasta un máximo de ocho circunferencias.

Cada uno de estos problemas constituye por sí mismo un interesante problema de construcción, nada de trivial en muchos casos, en los que un software de propósitos

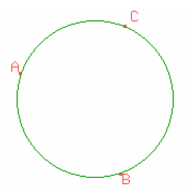
[1] El enunciado de este problema se atribuye a Pappus (siglo III, D.C.).
[2] Entre paréntesis se señala el número máximo de soluciones
[3] Los problemas PPP y RRR, habían sido resueltos por Euclides

geométricos como Cabri II, u otro con posibilidades dinámicas, resulta ser una herramienta poderosa y fundamental para la resolución de problemas de construcción, en las etapas de

análisis, construcción y discusión. Otro gran recurso que ofrece el software, es la posibilidad de construir macro-construcciones, que permite implementar diferentes construcciones básicas e intermedias, que pueden grabarse como archivos, y disponer de ellas en posteriores construcciones más complejas.

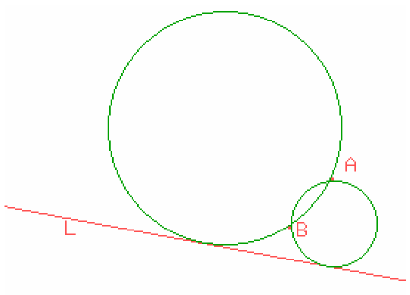
En una primera parte se presenta una solución a cada uno de los nueve primeros problemas, y en algunos de los casos se incluye la discusión correspondiente, y posteriormente una solución al Problema de Apolonio propuesta por Viète[4], construcción que se basa en el siguiente principio: reducir una circunferencia en un punto. Aplicando este método a la resolución del Problema de Apolonio, se agrega y se sustrae a los radios de las dos circunferencias de mayor radio, el radio de la circunferencia de menor radio, transformándolo en un problema del tipo PCC.

Los nueve primeros problemas

- **Problema PPP** (1): Dados tres puntos A, B y C, construir una circunferencia que pasa por A, B y C.
  

  <u>Construcción</u>: Es **la** circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo cuyos vértices son los tres puntos dados. Por lo útil de tenerla implementada como una macro, se ha creado la macro PPP.mac.
  <u>Discusión</u>: El problema tiene solución única, a menos que los puntos sean colineales y en tal caso no hay solución.

- **Problema PPR** (2): Dados dos puntos A y B, y una recta L, construir una circunferencia que pase por A y B, y que sea tangente a L.



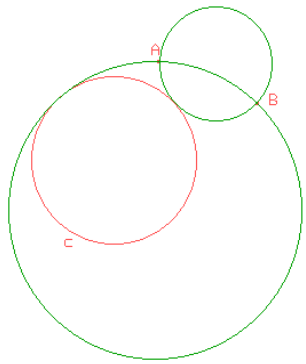
<u>Construcción:</u> Sea C el punto de intersección de la recta AB con la recta L y luego trazar una circunferencia s cualquiera que pase por A y B. Trazar por C las tangentes CP y CQ a la circunferencia s en P y Q respectivamente; trazar la circunferencia con centro C y radio CP, y sean M y N los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta L Las circunferencias determinadas por los puntos M-A-B y por los puntos N-A-B resuelven el problemas. Una macro construida para este problema es PPR.mac

<u>Discusión:</u> *Si los puntos están a un mismo lado de la recta:* Si la recta determinada por A y B no es paralela a L el problema tiene dos soluciones, y si lo fuere, tiene una solución. *Si uno*

[4] Francois Viète (1540-1803), Francia

de los puntos está en la recta: hay una solución. *Si los puntos están a distinto lado de la recta:* el problema no tiene solución

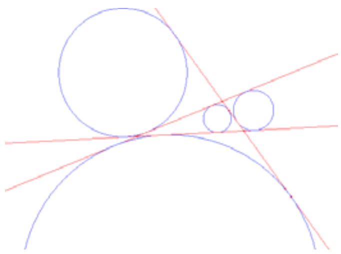
- **Problema PPC (**2): Dados dos puntos A y B, y una circunferencia c, construir una circunferencia que pasa por A y B y que sea tangente a la circunferencia c.



<u>Construcción:</u> Suponer que A y B están ambos en el exterior, o en el interior de la circunferencia y trazar una circunferencia que pase por A y B y que corte a la circunferencia c. Si S y T son los puntos de intersección; sea P el punto de intersección de las rectas AB y ST. Trazar por P las rectas tangentes a la circunferencia c, tal que M y N son los puntos de tangencia. Las circunferencias determinadas por los puntos M-A-B y N-A-B respectivamente, resuelven el problema.

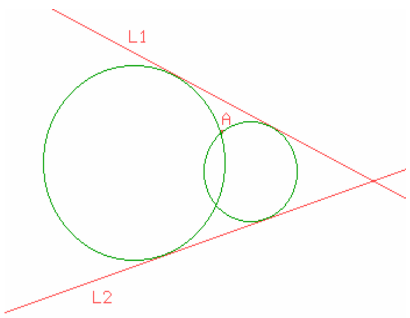
Una macro construida para este problema es PPC.mac
<u>Discusión</u>: S*i A y B están ambos al exterior o al interior* de la circunferencia, hay dos soluciones; . s*i uno de los puntos pertenece a la circunferencia,* tiene una solución, y s*i los puntos están, uno al interior y el otro al exterior,* el problema no tiene solución.

- **Problema RRR** (4): Dadas las rectas L1, L2 y L3, construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas.



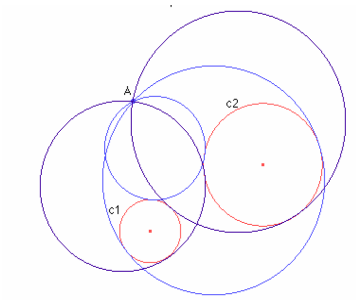
<u>Construcción</u>: Este problema tiene a lo más cuatro soluciones y corresponden a: la circunferencia inscrita y las tres exinscritas del *triángulo* determinado por las tres rectas.
<u>Discusión</u>: *Si las rectas se cortan dos a dos en puntos distintos*: el problema tiene cuatro soluciones; s*i dos de las rectas son paralelas y la tercera es secante*: dos soluciones y s*i las tres rectas son concurrentes o paralelas entres sí*: el problema no tiene solución.

- **Problema PRR** (2): Dados un punto A y dos rectas L1 y L2, construir una circunferencia que pasa por A y que sea tangente a las rectas dadas.



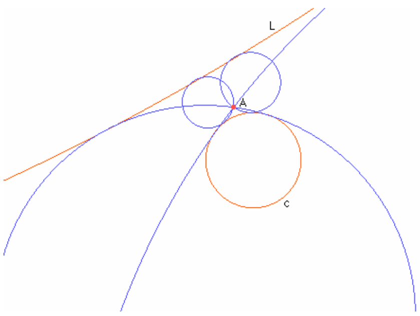
<u>Construcción</u>: Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas dadas (en cuyo interior se encuentra A) y sea A´ el simétrico de A respecto de la bisectriz. Aplicar la macro PPR.mac a los puntos A-A´ y la recta L1 (por ejemplo). Así se obtienen, las circunferencias, que cumplen las condiciones del problema.
<u>Discusión</u>: El problema tiene en general dos soluciones y la manipulación de los objetos básicos es fundamental en esta etapa.

- **Problema PCC** (4): Dados un punto A y dos circunferencias c1 y c2, construir una circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos circunferencias dadas

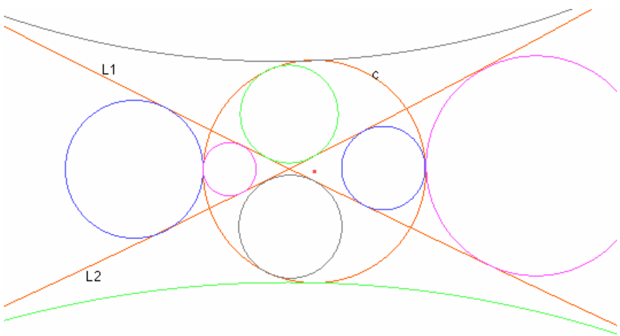
  Construcción: Construir la circunferencia de inversión con centro A, que deja invariante a c1.
  Sea c2´ la circunferencia transformada de c2 por la inversión. Construir las rectas tangentes (interiores y exteriores) a las circunferencias c1 y c2'
  Las transformadas (por la inversión) de las cuatro rectas, respecto de la circunferencia de inversión, corresponden a las circunferencias que pasan por A y son tangentes a las circunferencias dadas
  Una macro construída para este problemas es PCC.mac.

- **Problema PRC** (4): Dados un punto A, una recta L y una circunferencia c, construir una circunferencia que pasa por A y que sea tangente a la recta y a la circunferencia dadas.
  Construcción: (análoga al caso PCC, sustituyendo una de las circunferencias por una recta).

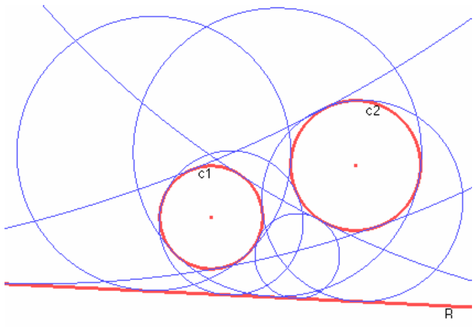
  Construir la circunferencia de inversión con centro A, que deja invariante a la circunferencia c. Construir la inversa de la recta L, sea s, respecto de la circunferencia de inversión. Construir las rectas tangentes a las circunferencias c y s. Las inversas de las rectas tangentes construidas respecto de la circunferencia de inversión, corresponden a las circunferencias que resuelven el problema.
  Discusión: El número de soluciones depende de la posición relativa de los objetos, el que varía de ninguna a 4 soluciones, que puede obtenerse manipulando dichos objetos..

- **Problema RRC** (8): Dadas dos rectas L1 y L2, y una circunferencias c, construir las circunferencias tangentes a las dos rectas y a la circunferencia

  Construcción: Trazando las rectas paralelas a las rectas dadas a una distancia igual al radio de la circunferencia dada (como lo muestra la figura), el problema se transforma en el caso RRP.
  Discusión: El número de soluciones depende de la posición relativa de los objetos, el que varía de ninguna a 8 soluciones.

- **Problema RCC** (8): Construir una circunferencia tangente a una recta dada y a dos circunferencias dadas.

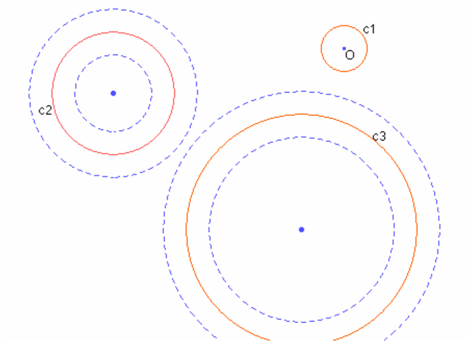


Construcción: Este problema se transforma en el caso RPC, trazando una recta paralela a la recta dada y trasladando la circunferencia de mayor radio, en ambos casos, a una distancia igual al radio de la circunferencia más pequeña.
Discusión: El número de soluciones depende de la posición relativa de los objetos, el que varía de ninguna a 8 soluciones.

El Problema de Apolonio

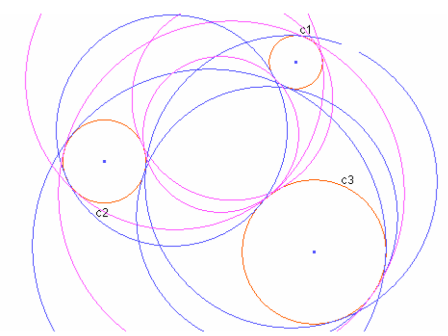
- **Problema CCC** (8): Dadas tres circunferencias c1, c2 y c3, construir las circunferencias tangentes a las tres circunferencia

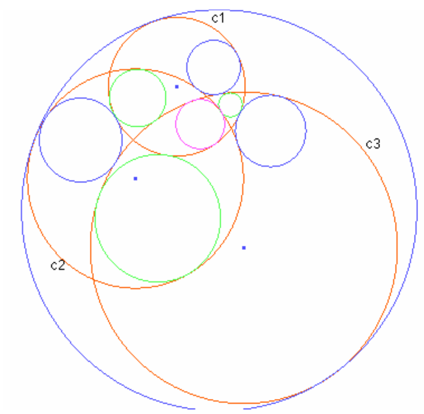
Construcción: Crear las tres circunferencias c1, c2 y c3, siendo c1 la circunferencia de radio menor. Trasladar el radio de la circunferencia de radio menor c1, a las otras dos circunferencias (aplicar método de traslación). Así el problema se transforma en un problema de la clase PCC, ya que la circunferencia de radio menor se ha reducido a un punto, su centro O.



Aplicando la macro PCC al punto O y a las circunferencias trasladadas de c2 y c3 respectivamente, resultan a lo más 8 circunferencias, soluciones del problema original.

Como ya se mencionó anteriormente, el número de circunferencias que resuelven el problema varía desde ninguna a un máximo de ocho circunferencias, y se puede obtener manipulando la figura. A continuación se presentan dos figuras considerando distintas posiciones de las tres circunferencias dadas:





Discusión:
Se supone que las tres circunferencias son distintas, es decir, cada pareja tiene a lo más dos puntos en común.

a) *Si las circunferencias son disjuntas*: Si las tres son exteriores: hay ocho soluciones reales. Si una es interior a otra, y la tercera exterior: el problema no tiene solución. Si dos de las circunferencias son exteriores, pero ambas se encuentran al interior de la tercera: hay ocho soluciones. Y, si las tres son interiores: el problema no tiene solución
b) *Si dos de las circunferencias son secantes*: Si la tercera circunferencia corta a las dos primeras sin pasar por uno de los puntos de intersección de las dos primeras: hay ocho soluciones. Si la tercera corta sólo a una de las otras dos circunferencias o no corta a ninguna, o pasa por uno de los puntos de intersección: el problema tiene cuatro soluciones. Y si la tercera circunferencia pasa por los dos puntos de intersección de las otras dos circunferencias: el problema no tiene solución
c) *Si dos de las circunferencias son tangentes*: Si son tangentes exteriores y la tercera es exterior: seis soluciones. Si son tangentes interiores y la tercera es interior a la de radio mayor y exterior a la de radio menor: seis soluciones. En otros casos, cuatro soluciones a lo más.
d) *Si las tres circunferencias son tangentes en el mismo punto*: el problema es indeterminado

Este problema ha interesado a muchos geómetras, Gergonne y Casey entre muchos otros, y lo han resuelto utilizando diversos recursos geométricos. La solución debida a Gergonne[5], que se puede aplicar a todos los casos particulares donde uno o más de las circunferencias dadas pueden reemplazarse por rectas y/o puntos, utiliza propiedades de la inversión y de la teoría de polos y polares. Casey, se basa en propiedades de la razón cruzada.

La solución presentada, debida a Viète, como se mencionó anteriormente, requiere esencialmente de dos construcciones previas: circunferencia(s) que pasan por dos puntos y tangentes a una recta dada (PPR) y circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto dado (PCC). Éstas permiten resolver el problema de una manera simple, cuya implementación en Cabri permite realizar su discusión aprovechando las posibilidades dinámicas del software.

Bibliografía

1. Coxeter, Harold S *Fundamentos de la Geometría.* 1971. México: Limusa-Wiley**.**
2. Laborde, Jean-Marie; Bellemain, Franck; Baulac, Yves. *Cabri-Géomètre: le CAhier de Brouillon Interactif pour la géomètre*. 1998. Manual de Cabri-geométrico. Laboratoire Leibniz de Grenoble.
3. Shively, Levi S. *Introducción a la geometría moderna*. 1963. Compañía editorial Continental.
4. Schumann, Heinz; Green, Davis. *Discovering Geometry with a computer.* 1994. Chartwell-Bratt.
5. http:// www-cabri-imag.fr/abracadabri/

[5] Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859, Francia. Gergonne introdujo la palabra polar y los principios de dualidad en geometría proyectiva.