Figuras geométricas y números enteros

Juana Contreras S.[6]
Claudio del Pino O.[7]
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Introducción

Entre las muchas relaciones numéricas que han despertado el interés de matemáticos y aficionados a la matemática, desde la época de los antiguos griegos, se encuentran aquellas que se obtienen de la observación de configuraciones de puntos que representan números, en una secuencia de figuras geométricas. Estos números se conocen con el nombre de *números figurados*. En esta clase de números se encuentran los llamados números *poligonales*.

Los pitagóricos (500 a.C.), para quienes los números enteros tenían un significado muy especial, influenciados por modelos regulares, descubrieron que los números tenían *formas,* y contemplaron en especial propiedades de los *números cuadrados*.

Los griegos realizaron también interesantes estudios con números pentagonales, hexagonales y otras formas. Representaban los números enteros por medio de configuraciones de puntos con formas geométricas muy simples que los caracterizaban. Estos modelos visuales se constituyeron en un importante recurso, ya que les permitía descubrir propiedades numéricas y características propias directamente de la observación de los objetos geométricos, y les sugería caminos para lograr una demostración más formal.

Los primeros trabajos matemáticos de los pitagóricos fueron sobre los *números poligonales.* Diofanto de Alejandría (200-284 a.C.) también trabajó con estos números, legando importantes resultados.

La construcción gradual o recurrente de los números *poligonales*, que conjuga elementos de aritmética, álgebra y geometría, lo hacen un tema interesante e inicialmente sencillo, que puede ser tratado en diversos niveles de enseñanza.

En este trabajo se presenta de manera resumida la temática de *números poligonales,* incluyendo algunas relaciones interesantes y actividades en el tema. El uso de herramientas computacionales, en particular de software matemáticos con capacidades gráficas y dinámicas, en el estudio de

[6] e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[7] e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

números poligonales, potencian actividades de exploración y descubrimiento de propiedades de estos números.

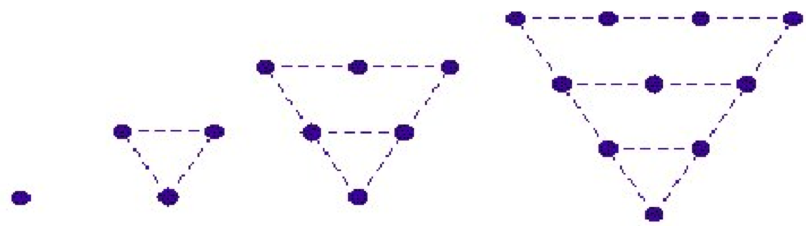
Números poligonales

Una descripción más explícita de *número poligonal* se presentará posteriormente.

Números triangulares

Los *números triangulares* son aquellos números naturales que se pueden representar mediante una configuración de puntos con forma de triángulo, con igual cantidad de puntos sobre cada lado, y que se construyen *agregando*, siguiendo un principio de recurrencia, una cantidad de puntos a la configuración del *número triangular* inmediatamente anterior.

La siguiente figura presenta las configuraciones de los cuatro primeros *números triangulares*:



1 **3** **6** **10**

Aunque un *número triangular* no queda definido de manera explícita, se desprende claramente a partir de las figuras, un principio de formación o ley de recurrencia de estos números.

Si se denota por T_1, T_2, T_3, ... a los *números triangulares* obtenidos en la primera, segunda, tercera, ... etapa, se observa:

Etapa 1	$T_1 = 1$	$T_1 = 1$
2	$T_2 = 1+2$	$T_2 = 3 = 1 + 2 = T_1 + 2$
3	$T_3 = 1+2+3$	$T_3 = 6 = 3 + 3 = T_2 + 3$
4	$T_4 = 1+2+3+4$	$T_4 = 10 = 6 + 4 = T_3 + 4$

obteniendo una ley de formación de estos números:

- *El número triangular que ocupa el lugar n,* $n > 1$, *denotado* T_n *se obtiene del número triangular anterior* T_{n-1} *añadiéndole el número entero n.*

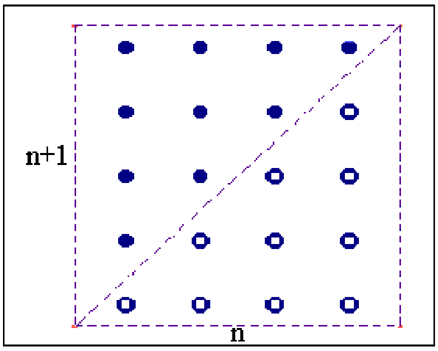
$$T_n = T_{n-1} + n$$

De la observación anterior se obtiene que: $T_n = 1+2+3+\cdots+n$, relación que permite obtener de manera explícita el *número triangular* que ocupa el *n*-ésimo lugar:

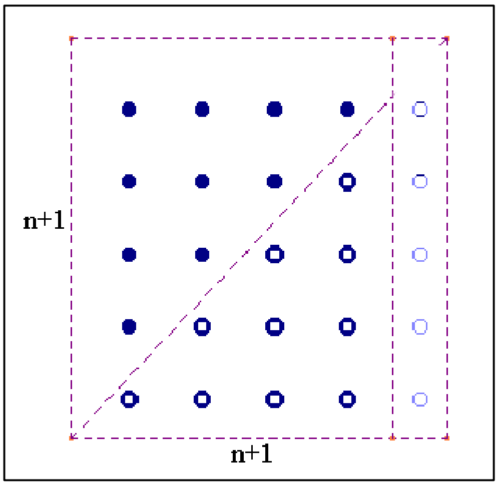
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observaciones

1. Los pitagóricos dedujeron esta fórmula a partir de la observación de números que se representaban por figuras de $n \times (n+1)$ puntos:



2. La misma relación la obtuvieron de la representación del *número cuadrado* $(n+1)^2$, que se obtiene agregando a la figura anterior una columna con $n+1$ puntos.



Específicamente: $2 \cdot T_n + (n+1) = (n+1)^2$ obteniendo: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. En la figura anterior se observa también, que la suma de dos *números triangulares* sucesivos, de lugares n y $n+1$, es un cuadrado perfecto: $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$

4. Los *números triangulares* se forman como *sumas parciales* de la progresión o sucesión aritmética:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

obteniendo la sucesión de *números triangulares*:

$$\boxed{1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \ldots}$$

tal que el n-ésimo *número triangular* es: $T_n = 1 + 2 + \cdots (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Actividad 1

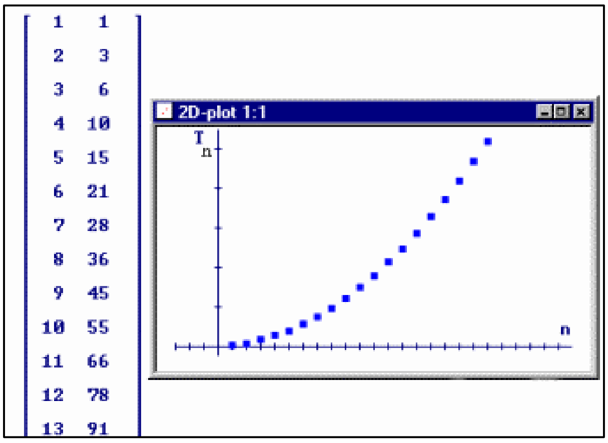
Se cuenta con 10000 fichas circulares.

a) ¿Cuál es el mayor número triangular que puede representar con las 10000 fichas?
b) Si con las 10000 fichas se construyen, uno tras otro, los números triangulares: 1, 3, 6, 10, etc. ¿Cuál es el mayor número triangular que se alcanza a construir?

Nota

a) Con apoyo de un software geométrico, se puede construir de diversas maneras, configuraciones geométricas de números triangulares, usando las transformaciones geométricas (traslaciones, reflexiones, rotaciones, homotecia).

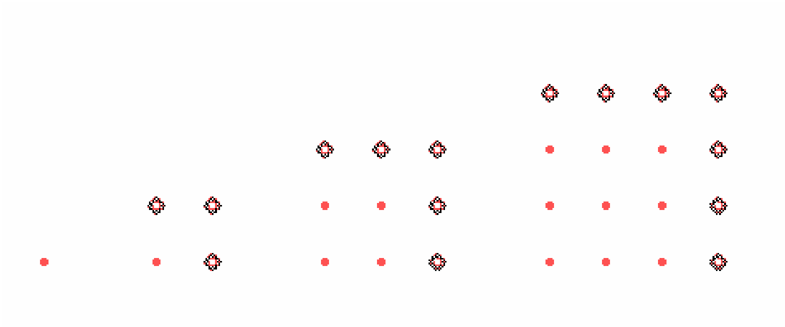
b) Con un software con capacidades algebraicas y gráficas, se puede apoyar el estudio aritmético, algebraico y gráfico. Por ejemplo, la siguiente figura presenta el gráfico, en coordenadas cartesianas, de los pares ordenados (n, T_n):



Números Cuadrados

Los números enteros asociados a configuraciones de puntos con forma de cuadrados, se llaman *números cuadrados*.

La siguiente figura muestra las configuraciones de los cuatro primeros *números cuadrados*:



1 4 9 16

Si se denota por C_1, C_2, C_3, ... a los *números cuadrados* obtenidos en la primera, segunda, tercera, ... etapa, se observa:

$C_1 = 1$	$C_1 = 1$
$C_2 = 1+3$	$C_2 = 4 = C_1 + 3$
$C_3 = 4+5=1+3+5$	$C_3 = 9 = C_2 + 5$
$C_4 = 9+7=1+3+5+7$	$C_4 = 16 = C_3 + 7$
...	

obteniendo una ley de formación de estos números:

- *El número cuadrado de lugar n, n>1, denotado* C_n *se obtiene* del *número cuadrado de lugar* n–1, *denotado* C_{n-1} *añadiéndole el número entero impar* $2n–1$

$$C_n = C_{n-1} + (2n-1)$$

La configuración que se añade a C_{n-1} para obtener la figura del *número cuadrado* C_n tiene la forma de una escuadra (llamada *gnomon* por los pitagóricos), con $2n–1$ puntos.

Observaciones:

1. Los *números cuadrados* corresponden a las sumas parciales de los términos de la progresión aritmética con primer término 1 y diferencia constante *d=2*:

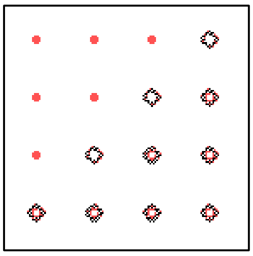
$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots$$

obteniendo la sucesión de *números cuadrados*:

$$\boxed{1,\quad 1+3,\ \ 1+3+5,\ \ 1+3+5+7,\ldots}$$

2. De la observación anterior se obtiene que:

$$C_n = n^2 = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$



3. De la observación de las configuraciones de *números cuadrados* se obtiene una relación entre *números cuadrados* y *números* triangulares: $C_n = T_{n-1} + T_n$

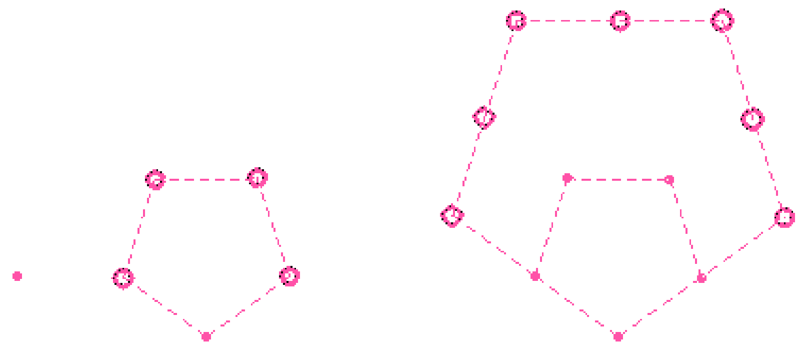
4. Resumiendo, el *número cuadrado* que ocupa el n-ésimo lugar, o el correspondiente a la etapa n cumple las siguientes relaciones:

$$C_n = C_{n-1} + (2n-1)$$
$$C_n = T_{n-1} + T_n$$
$$C_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Números pentagonales

Los números enteros asociados configuraciones de puntos con forma de pentágonos, se llaman *números pentagonales*.

Las configuraciones de los tres primeros números pentagonales son:



1 **5** **12**

Denotando por $P_1, P_2, P_3, \ldots$ a los números pentagonales, se tiene que:

$P_1 = 1$	$P_1 = 1$
$P_2 = 1+4$	$P_2 = 5 = P_1 + 4$
$P_3 = 1+4+7$	$P_3 = 12 = P_2 + 7$
$P_4 = 1+4+7+10$	$P_4 = 22 = P_3 + 10$
...	

obteniendo una ley de formación de estos números:

- *El número pentagonal de lugar n, n>1, denotado* P_n *se obtiene del número cuadrado de lugar n*–1*, denotado* P_{n-1} *añadiéndole el número entero impar* $3n–2$

$$P_n = P_{n-1} + (3n-2)$$

Observaciones

1. Los *números pentagonales* corresponden a los términos de la sucesión de sumas parciales de la progresión aritmética con primer término 1 y diferencia constante 3:

   1, 4, 7, 10, 13, ...

   cuyo *n*-ésimo término es 3*n*-2, obteniendo la sucesión de *números pentagonales*:

   $\boxed{1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ 1+4+7+10,\ \ldots}$

2. El *n-ésimo* número pentagonal corresponde a: $P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)$

3. Una manera de obtener una fórmula explícita del *número pentagonal* P_n es:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
P_n = & 1 & + & 4 & + & \ldots & + & 3n\text{-}5 & + & 3n\text{-}2 \\
P_n = & 3n\text{-}2 & + & 3n\text{-}5 & + & \ldots & + & 4 & + & 1 \\
\hline\hline
2\,P_n = & 3n\text{-}1 & + & 3n\text{-}1 & + & \ldots & + & 3n\text{-}1 & + & 3n\text{-}1
\end{array}$$

   obteniendo: $2P_n = n(3n-1)$, de donde: $P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

4. Otra relación interesante que se observa es la siguiente: cada *número pentagonal*, a partir del segundo, se puede representar como la suma de un *número cuadrado* y un *número triangular*:

$$P_2 = 4+1, \quad P_3 = 9+3, \quad P_4 = 16+6, \quad \cdots$$

   relación que se expresa: $P_n = C_n + T_{n-1} = n^2 + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ para cada $n > 1$.

Actividad 2

1. ¿Qué clase de *números poligonales* se obtienen calculando el promedio entre n^2 y n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$?
2. Respecto de la relación entre *números pentagonales*, *cuadrados* y *triangulares*. En la configuración de un *número pentagonal*, identificar una configuración del *número cuadrado* y *triangular*.

Observación

Continuando con el procedimiento seguido en la construcción de configuraciones de puntos de los *números triangulares*, *cuadrados*, *pentagonales*, se puede deducir que los *números* *hexagonales* corresponden a los términos de la sucesión de sumas parciales de una progresión aritmética con primer término 1 y diferencia 4:

$$1,\ 5, 9, 13, \ldots$$

Actividad 4

1. Obtener los cinco primeros *números hexagonales* y obtener una fórmula explícita para el *n*-ésimo *número hexagonal* H_n
2. ¿Existen números, distintos de 1, que son al mismo tiempo *números triangulares* y *cuadrados*?.
3. La siguiente secuencia de números:
   [685, 836, 1002, 1183, 1379, 1590, 1816, 2057, 2313, 2584, 2870]
   corresponden a *números poligonales* consecutivos asociados a un polígono de *m* lados. Determinar *m*.

Números poligonales

Una descripción más explícita de número poligonal es la siguiente:

Sea *m* un número natural fijo, $m \geq 3$.

Los números *m*-poligonales (triangulares, cuadrados, etc.) son aquellos números naturales que se pueden representar mediante una configuración de puntos con forma de un polígono de *m*-lados, que han sido construidos, anidando la configuración del número *m*-poligonal inmediatamente anterior, y cada vértice homotético respecto de un vértice común, tal que:

- Las anteriores configuraciones de polígonos de *m*-lados, corresponden a los números *m*-poligonales que tienen sucesivamente *uno, dos, tres, ...* puntos sobre cada lado del polígono.

- El número total de puntos en la configuración de la *k*-ésima etapa, donde hay *k* puntos sobre cada lado, corresponde al *k*-ésimo número *m*-poligonal:

$$Q(m,k)$$

Este número corresponde a la suma de los términos de la progresión aritmética:

$$1, \quad 1+(m-2), \quad 1+2(m-2), \ldots, 1+(k-1)(m-2)$$

Luego:

$$Q(m,k) = 1 \quad + \quad 1+(m-2) \quad + \quad 1+2(m-2) \quad + \quad \ldots \quad + \quad 1+(k-1)(m-2)$$

obteniendo: $Q(m,k) = k + \dfrac{(m-2)(k-1)k}{2}$,

expresión equivalente a: $Q(m,k) = \dfrac{k(2+(m-2)(k-1))}{2}$

de modo que, para *k=1, 2, 3, 4, 5, ...* se obtiene la sucesión de *números m-poligonales.*

Números poligonales con *DERIVE*[♣]

Se definen las siguientes funciones en *DERIVE*:

$$Q(m,k) := k(2+(m-2)(k-1))/2$$

Poligonal(*m,r,s): = vector([k, Q(m,k)], k, r, s)*

Usando estas funciones:

- Para *m=3*, se obtienen *números triangulares* asignando a *k* los valores *1, 2, 3, ...* Por ejemplo:

$$\text{poligonal}(3,\ 1,\ 10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \end{bmatrix}$$

$$\text{poligonal}(3,\ 60,\ 65) = \begin{bmatrix} 60 & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 \\ 1830 & 1891 & 1953 & 2016 & 2080 & 2145 \end{bmatrix}$$

$$q(3,\ n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Para *m=4*, se obtienen *números cuadrados.* Por ejemplo:

$$\text{poligonal}(4,\ 1,\ 10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \end{bmatrix}$$

$$q(4,\ n) = n^2$$

- Para *m=11*, se obtienen números *11-poligonales*, y la fórmula explícita del *n*-ésimo número poligonal es:

$$q(11,\ n) = \frac{n\cdot(9\cdot n - 7)}{2}$$

[♣] *DERIVE*: software computacional de propósitos matemáticos con capacidades de cálculo numérico, simbólico y gráfico, especialmente diseñado para la enseñanza de la matemática, de enseñanza media y superior. http://www.ti.com/calc/latinoamerica/derivewin.htm

Actividad 5

a) De las configuraciones de números cuadrados se obtuvo una relación de éstos con *números triangulares*. Escribir la relación.

b) Calcular $T_2 + 2T_1$, $T_3 + 2T_2$, $T_4 + 2T_3$, donde T_n representa el *n*-ésimo *número triangular*. Identificar estos números, enunciar la propiedad que observa e intentar demostrarla.

c) De manera análoga, identificar los números $T_2 + 3T_1$, $T_3 + 3T_2$, $T_4 + 3T_3$.

Observaciones finales

1. Un importante teorema establecido por P. Fermat (matemático francés, 1601-1665), y probado 160 años más tarde por Cauchy (matemático francés, 1789-1857) es:

   Todo número natural es un número m-poligonal, o la suma de a lo más m números m-poligonales

   En particular:
   - Todo número natural es un *número triangular*, o es suma de a lo más tres *números triangulares*.
   - Todo número natural es un número cuadrado, o es suma de a lo más cuatro *números cuadrados*.

2. Otros resultados, obtenidos por C. G. Bachet (matemático francés, 1581-1638) son:

   a) Todo número *m-poligonal* es suma de un *número triangular* que ocupa el mismo lugar y *(m-3)* veces el *número triangular* que ocupa el lugar inmediatamente anterior.

   $$Q(m,n)=Q(3,n)+(m-3)Q(3,n-1)$$

   Este resultado señala que la sucesión de *números poligonales* que ocupan el mismo lugar, constituyen una progresión aritmética. Por ejemplo:

```
Ocupan el lugar 2 = [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
Ocupan el lugar 3 = [6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27]
Ocupan el lugar 4 = [10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52]
Ocupan el lugar 5 = [15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85]
Ocupan el lugar 11 = [66, 121, 176, 231, 286, 341, 396, 451]
```

   b) $Q(m,n) = Q(m-1,n) + Q(3, n-1)$, para todo $m, n \in IN$, $m > 3$

3. Actualmente, los avances alcanzados en tecnología computacional junto con el desarrollo de software matemáticos, han permitido experimentar con *números poligonales* y así, encontrar propiedades de estos números y obtener curiosas relaciones y conjeturas.

   a) Por ejemplo:
   - Los números 21, 2211, 222111, 22221111, ... así como los números 55, 5050, 500500, 50005000, 5000050000, ... son *triangulares*.
   - Las dos listas siguientes de *números poligonales*:

$$\text{poligonal}(3,\ 1,\ 10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \end{bmatrix}$$

$$\text{poligonal}(6,\ 1,\ 10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 15 & 28 & 45 & 66 & 91 & 120 & 153 & 190 \end{bmatrix}$$

   permiten observar que el *45* es un *número triangular* que ocupa el noveno lugar y es el quinto *número hexagonal* y *45=9*5.*

   Otro número *triangular* y *hexagonal* es *4950*, y es tal que $T_{99} = H_{50} = 4950$ y *99*50=4950.*

   - La siguiente proposición se encuentra en estado de conjetura:

   ¿Es cierta la observación anterior para todos los números que son al mismo tiempo *triangulares* y *hexagonales*?

   b) Notar que para cada número natural *m*, *Q(m,n)* es una expresión cuadrática. Luego, los pares ordenado *(n, Q(m,n))* son puntos de una parábola. La visualización de los gráficos de estos conjuntos en el plano cartesiano ha permitido realizar interesantes exploraciones y plantear nuevas conjeturas.

4. Estudios, análogo al de números poligonales en el plano, se han realizado con configuraciones de números en tres dimensiones, formando *pilas piramidales* de esferas sobre bases triangulares, cuadradas, etc.
   Por ejemplo, los primeros números 3-piramidales son: 1, 4, 10, 20, ... ,y los primeros números *4-piramidales* son: 1, 5, 14, 30, etc.

Finalmente, cabe señalar la importancia de los *números poligonales* y *números figurados* en la Teoría de los Números, cuyo estudio ha contribuido con importantes resultados e interesantes desafíos.

Bibliografía

[1] Abramovich, S. et all. *Multiple-Application Medium for the Study of Polygonal Numbers*. Proceedings of the 1994 International Symposium on Mathematics/Science Education and Technology. Charlottesville. 1994.
[2] Duvillié, B. *Sur les traces de l'Homomathematicus*. Ellipses. 1999.
[3] Gardner, M. *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Alianza Editorial. 1966
[4] Stewart, B.M. *Theory of Numbers*. The MacMillan Co. 1964.