Aplicación de la hoja de cálculo para determinar ceros y extremales de una función.

Walter Bussenius Cortada[8]
Genaro Castillo Guzmán
Gonzalo Cabezas Cabezas
Carlos Becerra Labra

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Introducción:

El abismante desarrollo que ha tenido la computación en este último tiempo ha producido un cambio radical en la forma de concebir el computador, el cual ha pasado de ser una máquina, ideada para resolver problemas en especial de carácter numérico y operada por un especialista; a ser una máquina que ayuda a desarrollar múltiples tareas y que puede ser manejada por cualquier ciudadano; que con mayor o menor grado de conocimientos, puede obtener de ella, mayor o menor provecho.

Los cambios generados por el desarrollo de la computación, han permitido que la máquina ayude a escribir textos (programas como Word, Word Perfect, Claris Word, etc), ordenar planillas de cálculo (tales como Lotus-123, Qpro, Work, Excel, Claris Work, etc), crear bases de datos (algunas son: Dbase, Lotus Aproach, Work, Claris Work, etc.), hacer dibujos (programas como: Free Hand, Power Point, Work, Claris Work, etc.), pintar (por ejemplo: Paint, Kid-Pic, Work, Claris Work, etc.) , comunicarse (por medio de: Eudora, Nescape, Claris Work, etc.) y muchas otras.

Para estas ayudas que nos brinda la máquina se han confeccionado programas específicos, los cuales permiten significativos logros con escasos conocimientos.

Puesto que la gran mayoría de los usuarios de computadores han tenido sólo cursos introductorios, el uso de estas máquinas se restringe mayoritariamente a procesar texto y emplear planillas de cálculo, pero sin hacer aplicaciones de cálculo muy específicas.

El presente trabajo propone una manera simple de resolver ecuaciones, y analizar funciones, aplicando el método de Newton-Raphson en una hoja de cálculo sin necesitar de conocimientos, ni de cálculo avanzado ni de computación.

Específicamente los objetivos de este trabajo son; que cualquier usuario pueda, usando una planilla electrónica:

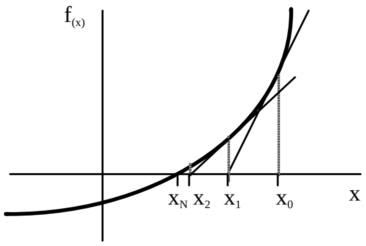
- Resolver una ecuación trascendente.
- Determinar los ceros de un polinomio.

[8] wbussen@pehuebche.utalca.cl

- Encontrar los extremales (máximos y mínimos) de una curva.

Método de Newton-Raphson:

Para entender este método consideremos una función que posee un cero en el punto (x_N) y situémonos además en un punto cualquiera (x_0). Se traza luego una tangente a dicha curva en aquél punto arbitrario, así se determina un nuevo punto (x_1) en que dicha recta tangente corta el eje de las abscisas y se evalúa la función en dicho punto (x_1). Se vuelve a trazar una nueva tangente al nuevo punto, obteniendo una nueva recta tangente que corta al eje de las abscisas en otro punto (x_2), el cuál esta más cercano al punto x_N , punto en el que la curva corta al eje de las abscisas (ver fig. 1).



(fig. 1)

Repitiendo este proceso varias veces se podrá aproximar al punto x_N tanto como se quiera. Generalmente un reducido número de iteraciones (menos de diez) nos permite una precisión superior a una parte en un millón, no obstante existen funciones en que esta convergencia no es tan rápida.

Este procedimiento permite ir aproximándose al punto buscado mediante sucesivas iteraciones. Así, aunque aquí no lo demostraremos, el punto x1 se relaciona con el x0 mediante :

$$\mathbf{x_1 = x_0 - \mathit{f}(x)/\mathit{f}'(x)} \qquad (1)$$

donde x_0 es un valor de la variable a partir del cual se comienza a iterar y que ojalá no esté muy alejado del valor esperado para que la iteración converja rápidamente al cero de la curva.

La relación (1), entre x_0 y x_1, también es válida entre x_1 y x_2. En general entre x_j y x_{j+1}.

Puesto que la tangente al punto corresponde a la derivada, ésta la definiremos mediante:

$$\mathbf{\mathit{f}'(x) = [\ \mathit{f}(x+\varepsilon) - \mathit{f}(x-\varepsilon)\ ] /2\ \varepsilon} \qquad (2)$$

así la tasa de variación de la función en el punto x se determina mediante la diferencia entre los valores de la función en dos puntos cercanos, uno anterior y el otro posterior a x, dividido por el segmento de variación de x, que es 2 ε.

La segunda derivada de f(x) viene dada por la diferencia de las derivadas determinadas entre (x+ε) y (x) por un lado y por el otro entre (x) y (x-ε). Específicamente se tiene:

$$\mathbf{\mathit{f}'(x+\varepsilon) = [\ \mathit{f}(x+\varepsilon) - \mathit{f}(x)\ ] /\varepsilon} \qquad \mathbf{\mathit{f}'(x-\varepsilon) = [\ \mathit{f}(x) - \mathit{f}(x-\varepsilon))\ ] /\varepsilon} \qquad (3)$$

así al hacer la diferencia y dividir por ε se obtiene:

$$f''(x) = [\, f(x+\varepsilon) - 2\, f(x) + f(x-\varepsilon)\,] / \varepsilon^2 \qquad (4)$$

expresión que representa la segunda derivada de f evaluada en el punto x.

Algunos resultados teórico-prácticos que deben tenerse en consideración al aplicar el método de Newton-Raphson

Si una función f admite hasta la segunda derivada continua en un intervalo [a,b] y existe p que pertenece a [a,b], tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$ entonces siempre existe un subintervalo alrededor de p tal que, cualquiera sea el valor elegido en ese intervalo, para comenzar la iteración, la sucesión debe ser convergente a p.

Debe considerarse x cercano a p tal que:

$$|\, \{ f(x)\, f''(x) \} / f'(x)\, f'(x)\, | < 1 \qquad (5)$$

a veces sucede que también $f'(p) = 0$, $f''(p) = 0$, etc. en ese caso se dice que p es un cero doble, triple, etc.

En esta situación el método de Newton se puede transformar en oscilatorio, o requiere de muchas iteraciones. Para salvar esta dificultad se define una función:

$$u(x) = f(x) / f'(x) \qquad (6)$$

se puede probar, que si f tiene un cero doble, triple, etc. en p, entonces u(x) tiene un cero simple en p.

Definición: p es un cero de multiplicidad m de f si:

$$f(x) = (x - p)^m\, q(x) \qquad (7)$$

con $q(p) \neq 0$ o bien el límite de q(x) cuando x tiende a p sea distinto de cero. Así la expresión:

$$u(x) = (x - p)^m\, q(x) / \{ m\, (x - p)^{m-1}\, q(x) + (x - p)^m\, q'(x) \} \qquad (8)$$

se reduce a:

$$u(x) = (x - p)\, q(x) / \{ m\, q(x) + (x - p)\, q'(x) \} \qquad (9)$$

entonces u(x) también tiene un cero en p, pero:

$$q(p) / \{ m\, q(p) + (p - p)\, q'(p) \} = 1/m \neq 0 \qquad (10)$$

o sea, p es un cero simple de u(x).

Así se puede aplicar el método de Newton a u(x) generando:

$$\mathbf{x1 = x_0 - u(x_0) / u'(x_0)} \tag{11}$$

Claro que esta expresión requiere un mayor número de operaciones.

Haciendo los cálculos del caso se obtiene:

$$\mathbf{x_1 = x_0 - \mathit{f}(x_0) \cdot \mathit{f}'(x_0) / \{ [\mathit{f}'(x_0)]^2 - \mathit{f}(x_0) \cdot \mathit{f}''(x_0) \}} \tag{12}$$

expresión que implica conocer $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

En la planilla:

Dado que no todas las planillas electrónicas poseen símbolos griegos ni tampoco símbolos matemáticos, en lo sucesivo reemplazaremos le letra griega épsilon por la letra e de nuestro alfabeto, esto es: ε —> e . Además la elevación a potencias la escribiremos de la forma en que habitualmente se opera en una planilla electrónica, por ejemplo: x^2 —> a^2 .

De esta manera, se introduce en la columna A de la planilla los valores de la variable (x), en la B los valores de (x+e) y en la C los valores de (x-e). En la columna D se introduce una expresión para la función $f(x)$ evaluada en (x_0), que está en la columna A. En la columna E se copia la función pero evaluada en (x_0+e) y en la F se vuelve a copiar pero evaluada en (x-e).

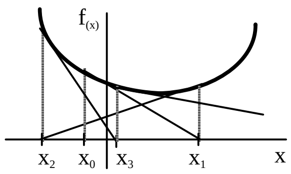
En la columna G se escribe una expresión para la derivada de $f(x)$, es decir $f'(x)$, expresión (2). En la columna H se escribe una expresión para la segunda derivada, es decir, $f''(x)$, expresión (4). La columna I corresponde a la función lógica y por último la columna J contiene la expresión (12) que nos permite obtener los siguientes valores de x.

Existe sin embargo situaciones en las cuales la función no converge, o bien converge a un punto que no es un cero.

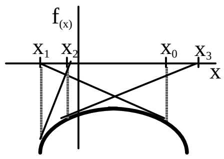
Específicamente los casos posibles son:

1. Existencia de un mínimo sobre el eje de las abscisas, entonces el método citado, al iterar, da valores oscilantes (ver fig. 2 a).
2. Existencia de un máximo bajo el eje de las abscisas, entonces el método citado, al iterar, también da valores oscilantes.
3. Forma asintótica, de la función, en este caso las iteraciones siguen por la asintota sin converger a ningún valor de x.

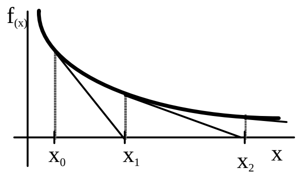
Es importante aclarar que este método permite sólo encontrar los ceros de una función, sin embargo, al trabajar con la derivada de la función en lugar de hacerlo con la función misma, los máximos y mínimos corresponden a los ceros de esta nueva función, es decir de la derivada de la función.



(Fig. 2a)



(Fig. 2b)



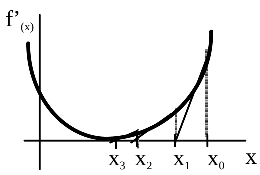
(Fig. 2c)

En este caso, al hacer un estudio de los máximos y mínimos de una función, podemos encontrar situaciones como:

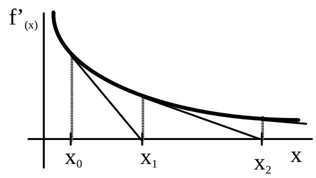
1. Que la forma asintótica, de la función, haga que la iteración siga por una asintota sin converger a ningún valor de x (situación equivalente a la de la figura 2 c).
2. La existencia de puntos de inflexión, en los cuales la nueva función toca el cero pero no atraviesa el eje de las abscisas.

Una vez digitada la información mencionada antes, la diferencia entre encontrar ceros o determinar extremales está en la expresión lógica que permite analizar la situación de la función y en la forma de obtener los siguientes valores de x_j.

Para aplicar este cálculo a una función en particular, podrá escribirse la expresión de ésta en la casilla [D3], quedando así evaluada en el valor de la casilla [A3], acto seguido se copia la función dos veces hacia el lado (a las casillas [E3] y [F3]), en las cuales la función será evaluada en [B3] y [C3] respectivamente; es decir en (x_0+e) y (x_0-e). Posteriormente puede copiarse las columnas desde A hasta J hacia abajo, unas diez o quince filas.



(Fig. 2a)



(Fig. 2b)

Generalmente la convergencia es rápida y se encuentra la solución antes de diez iteraciones, no obstante existen curvas más complicadas que requieren un mayor número de iteraciones, esto depende de manera significativa de la elección del punto inicial, el cual se ubica en [J2]. Las columnas G y H corresponden a la primera y segunda derivada de la función, las cuales se determinan tal como se definieron antes.

La columna J representa el valor x1, es decir el siguiente sobre el cual se evaluará la función. Finalmente la columna I corresponde a la función lógica, la cual deberá indicar la situación en que se encuentra la iteración, es decir indicar "siga" si no se detecta nada de interés e indicar máximo, mínimo, asintota, punto de inflexión, cero según sea el caso.

Encontrar ceros de una función:

La columna I corresponde a una función lógica, la cual indicará “siga” si la diferencia entre [x_0 - x_1] es mayor que la cota de precisión deseada para el resultado, cuando dicha diferencia se iguale o sea inferior a dicha cota, en aquélla columna aparecerá la palabra “cero”, indicando que ese es el valor en que la función corta al eje de las abscisas.

Es importante destacar que, la enorme variedad de funciones existentes, obligan a anteponerse a posibles dificultades que el cálculo numérico pueda presentar. Puesto que también existen funciones que no poseen soluciones reales, es decir que no poseen ceros, dichas funciones generalmente poseen al menos un máximo o un mínimo dependiendo de si está bajo o sobre el eje de las abscisas. En estos casos la función lógica ingresada indica si se trata de un máximo o de un mínimo aunque no permite determinar dicho valor. También existe funciones que son asintóticas a uno o a ambos lados, esta situación también es contemplada y en tal caso la función lógica indica “Asintótica”.

La función lógica empleada para detectar la existencia de los ceros y que también indican si existe un máximo, un mínimo o si la curva es asintótica, se presentan a continuación :

Lógico (13)
**=SI(ABS(A3-J3)<B2;SI(E3*F3<0;"cero";"cero2");SI(ABS(D4-D3)<B2;
SI(E3*F3>0;"Asíntota";"cero3");SI(G4*G3<0;SI(H3>0;"mínimo";"Máximo");"siga")))**

Cabe aclarar que el caso “cero2” corresponde a una función que toca el eje de las abscisas sin traspasarlo. Además el caso “cero3” corresponde a un cero de muy lenta convergencia y que tiende a confundirse con una asintota. Por último, B2 representa el valor de e.

Veamos como se presenta esta planilla, para ello consideremos, a modo de ejemplo, la función cúbica:

f(A3) =-(A3*A3*A3-4*A3*A3-3*A3-6)

la que posee un cero en x = 4,869188

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	0,000005		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F''	x =	5
5	5,000005	4,999995	-4	-4,00e+0	-3,99e+0	-3,19e+1	-2,20e+1	siga	4,863248
4,863e+0	4,863e+0	4,863e+0	1,729e-1	1,727e-1	1,730e-1	-2,90e+1	-2,11e+1	siga	4,869175
4,869e+0	4,869e+0	4,869e+0	3,750e-4	2,291e-4	5,209e-4	-2,91e+1	-2,12e+1	siga	4,869188
4,869e+0	4,869e+0	4,869e+0	1,753e-9	-1,458e-4	1,458e-4	-2,91e+1	-2,12e+1	cero1	4,869188
4,869e+0	4,869e+0	4,869e+0	-1,77e-15	-1,458e-4	1,458e-4	-2,91e+1	-2,12e+1	cero1	4,869188
4,869e+0	4,869e+0	4,869e+0	-1,77e-15	-1,458e-4	1,458e-4	-2,91e+1	-2,12e+1	cero1	4,869188

Si ahora quisiéramos introducir otra función, será suficiente con ingresarla en [D3], considerando que la variable (x) esta en [A3]. Acto seguido se copia en [E3] y [F3], luego se rellenan las celdas [D3], [E3] y [F3] hacia abajo. Cambiando el valor de [J2] se van obteniendo las distintas soluciones de la ecuación.

Encontrar extremales a una curva:

El método anterior también puede aplicarse para obtener extremales de una curva, en este caso deberá tenerse en cuenta que un máximo o un mínimo en la función corresponde a un cero en la derivada de aquélla. Así, aplicando el método de Newton-Raphson la relación de iteración, entre x0 y x1, toma la forma:

$$\mathbf{x_1 = x_0 - f'(x)/f''(x)} \quad (14)$$

por lo cual debe trabajarse con la derivada de la función en lugar de hacerlo con la función misma.

En esta nueva situación se emplea las mismas columnas que en la anterior, sólo se diferencian, como se mencionó antes, la determinación del nuevo valor de x (columna J) y la función lógica (columna I).

La columna I corresponde a una función lógica, la cual indicará “siga” si la diferencia entre [x_0 - x_1] es mayor que la cota de precisión deseada para el resultado, cuando dicha diferencia se iguale o sea inferior a dicha cota, en aquélla columna aparecerá la palabra “Máximo” o “mínimo”, dependiendo de si la segunda derivada es negativa o positiva respectivamente. Si la función toca el eje de las abscisas pero no lo cruza, la función lógica indica “Punto inflexión”. y si la iteración se hace por una asintota y la función lógica no converge, deberá indicar “Asíntota”.

La función lógica empleada para detectar la existencia de los máximos y mínimos, se presentan a continuación:

Lógico (15)
=SI(ABS(A3-J3)<B2;SI(G4*G3<=0;SI(H3>0;"min";"MAx");
"Pto-Inf");SI(ABS(F3-E3)<B2;SI(E3*F3>0;"Asint";"¿M-m?");"siga"))

En este caso, al igual que en el anterior, B2 representa el valor de e.

Si consideramos la misma curva estudiada antes, al comenzar a iterar en x = 5, encontramos que posee un máximo en x = 3 y si iteramos a partir de x = -1, percibimos la existencia de un mínimo asociado a x = -0,33333. Estas situaciones se aprecian en las planillas que se adjuntan.

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	5,0e-6		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F''	x =	5,00
5,00	5,00	5,00	-4,00	-4,00	-4,00	-32,00	-22,00	siga	3,54546
3,55	3,55	3,55	22,35	22,35	22,35	-6,35	-13,27	siga	3,06726
3,07	3,07	3,07	23,98	23,98	23,98	-0,69	-10,40	siga	3,00130
3,00	3,00	3,00	24,00	24,00	24,00	-0,01	-10,01	siga	3,00000
3,00	3,00	3,00	24,00	24,00	24,00	-0,00	-10,00	MAX	3,00000
3,00	3,00	3,00	24,00	24,00	24,00	0,00	-10,00	MAX	3,00000

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	5,0e-6		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F"	x =	-1,00
-1,00	-1,00	-1,00	8,00	8,00	8,00	-8,00	14,00	siga	-0,42857
-0,43	-0,43	-0,43	5,53	5,53	5,53	-0,98	10,57	siga	-0,33591
-0,34	-0,34	-0,34	5,48	5,48	5,48	-0,03	10,02	siga	-0,33334
-0,33	-0,33	-0,33	5,48	5,48	5,48	-0,00	10,00	min	-0,33333
-0,33	-0,33	-0,33	5,48	5,48	5,48	0,00	10,00	min	-0,33333
-0,33	-0,33	-0,33	5,48	5,48	5,48	0,00	10,00	min	-0,33333

Si ahora quisiéramos introducir otra función, será suficiente con ingresarla en [D3], considerando que la variable (x) esta en [A3]. Acto seguido se copia en [E3] y [F3], luego se rellenan las celdas [D3], [E3] y [F3] hacia abajo. Cambiando el valor de [J2] se van obteniendo los distintos máximos y mínimos de la función.

Otras aplicaciones:

1.- Ecuación de segundo grado

Supongamos que deseamos conocer los ceros de la siguiente ecuación cuadrática:

x^2 + 5 x + 4 = 0

se ingresa esta ecuación en la celda [D3], de la forma:

A3^2+5*A3+4

así la función queda evaluada en el valor de x de la celda [A3], se rellena esta expresión a las celdas contiguas [E3] y [F3]. Finalmente se rellena estas tres columnas hacia abajo.

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	0,000005		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F"	x =	5
5	5,000005	4,999995	54	5,400e+1	5,399e+1	1,499e+1	2,000e+0	siga	-1,923191
-1,92e+0	-1,92e+0	-1,92e+0	-1,91e+0	-1,91e+0	-1,91e+0	1,153e+0	2,000e+0	siga	-1,494999
-1,49e+0	-1,49e+0	-1,49e+0	-1,23e+0	-1,23e+0	-1,23e+0	2,010e+0	2,000e+0	siga	-1,112743
-1,11e+0	-1,11e+0	-1,11e+0	-3,255e-1	-3,255e-1	-3,255e-1	2,774e+0	2,000e+0	siga	-1,004567
-1,00e+0	-1,00e+0	-1,00e+0	-1,368e-2	-1,366e-2	-1,369e-2	2,990e+0	2,000e+0	siga	-1,000007
-1,00e+0	-1,00e+0	-1,00e+0	-2,092e-5	-5,924e-6	-3,592e-5	2,999e+0	2,000e+0	siga	-1,000000
-1,00e+0	-9,999e-1	-1,00e+0	-4,86e-11	1,499e-5	-1,500e-5	2,999e+0	2,000e+0	cero1	-1,000000
-1	-9,999e-1	-1,00e+0	0	1,500e-5	-1,499e-5	2,999e+0	2,000e+0	cero1	-1,000000

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	0,000005		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F"	x =	-5
-5	-4,99e+0	-5,00e+0	4	3,999e+0	4,000e+0	-4,99e+0	2,000e+0	siga	-3,823520
-3,82e+0	-3,82e+0	-3,82e+0	-4,982e-1	-4,983e-1	-4,982e-1	-2,64e+0	2,000e+0	siga	-3,988324
-3,98e+0	-3,98e+0	-3,98e+0	-3,489e-2	-3,490e-2	-3,487e-2	-2,97e+0	1,999e+0	siga	-3,999954
-3,99e+0	-3,99e+0	-3,99e+0	-1,373e-4	-1,523e-4	-1,223e-4	-2,99e+0	1,999e+0	siga	-4,000000
-3,99e+0	-3,99e+0	-4,00e+0	-2,096e-9	-1,500e-5	1,499e-5	-2,99e+0	2,000e+0	cero1	-4,000000
-4	-3,99e+0	-4,00e+0	0	-1,499e-5	1,500e-5	-2,99e+0	1,999e+0	cero1	-4,000000

En la celda [J2] se ingresa un valor, por ejemplo 5. Así en la fila 7 aparece el resultado, en este caso -1,000000.

Al ingresar en la celda [J2] el valor -5; en la quinta fila aparece el valor -4,000000.

Con ambos valores ingresados en la planilla para determinar extremales (5 ó -5), en la tercera fila acusa la existencia de un mínimo en el punto -2,500000.

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	5,0e-6		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F"	x =	-5,00
-5,00	-5,00	-5,00	4	3,999e+0	4,000e+0	-5,00	2,00	siga	-2,50004
-2,50	-2,50	-2,50	-2,24e+0	-2,24e+0	-2,24e+0	-0,00	2,00	siga	-2,50000
-2,50	-2,50	-2,50	-2,25	-2,24e+0	-2,24e+0	-0,00	2,00	min	-2,50000
-2,50	-2,50	-2,50	-2,25	-2,24e+0	-2,24e+0	0,00	2,00	min	-2,50000

2.- Ley de desplazamiento de Wien

La expresión que relaciona la intensidad de radiación de un cuerpo negro con la longitud de onda y con la temperatura a la que esta dicho cuerpo, se conoce como “ley de radiación de Planck”, de ésta es posible deducir algunas leyes que históricamente fueron obtenidas de manera empírica antes de que Planck formulara su teoría de los cuantos. Una de estas leyes es la que relaciona la longitud de onda de máxima intensidad con la temperatura del cuerpo, conocida como “ley de desplazamiento de Wien”.

Esta ley expresa que el producto de la longitud de onda de máxima intensidad (λmáx) por el valor de la temperatura absoluta (T) del cuerpo es igual a una constante, explícitamente se sabe que:

$$\lambda\text{máx} * T = \text{cte}$$

cuyo valor se conoce experimentalmente y es: 0,002898 (m °K)

Al buscar la longitud de onda de máxima intensidad en la ley de radiación de Planck, se deriva e iguala a cero, obteniéndose la expresión:

$$5\ x\ (\ 1 - e\text{^}(-0{,}014388/x)\ ) - 0{,}014388 = 0$$

x0	x0+e	x0-e	f(x)	f(x+e)	f(x-e)	f'(x)	f''(x)	Lógico	x1
e =	0,000005		F(A3)	F(B3)	F(C3)	F'	F"	x =	1
1	1,000005	0,999995	5,702e-2	5,702e-2	5,702e-2	5,124e-4	-1,011e-3	siga	0,495587
4,955e-1	4,955e-1	4,955e-1	5,651e-2	5,651e-2	5,651e-2	2,066e-3	-8,251e-3	siga	0,247438
2,474e-1	2,474e-1	2,474e-1	5,549e-2	5,549e-2	5,549e-2	8,130e-3	-6,444e-2	siga	0,123569
1,235e-1	1,235e-1	1,235e-1	5,351e-2	5,351e-2	5,351e-2	3,136e-2	-4,881e-1	siga	0,061648
6,164e-2	6,165e-2	6,164e-2	4,976e-2	4,976e-2	4,976e-2	1,167e-1	-3,49e+0	siga	0,030701
3,070e-2	3,070e-2	3,069e-2	4,304e-2	4,304e-2	4,303e-2	4,041e-1	-2,23e+1	siga	0,015261
1,526e-2	1,526e-2	1,525e-2	3,219e-2	3,219e-2	3,218e-2	1,215e+0	-1,13e+2	siga	0,007631
7,631e-3	7,636e-3	7,626e-3	1,797e-2	1,799e-2	1,796e-2	2,810e+0	-3,53e+2	siga	0,004087
4,086e-3	4,091e-3	4,081e-3	5,440e-3	5,461e-3	5,418e-3	4,331e+0	-4,48e+2	siga	0,002975
2,975e-3	2,980e-3	2,970e-3	3,694e-4	3,932e-4	3,455e-4	4,768e+0	-3,12e+2	siga	0,002898
2,898e-3	2,903e-3	2,893e-3	9,515e-7	2,490e-5	-2,301e-5	4,791e+0	-2,96e+2	cero1	0,002898
2,897e-3	2,902e-3	2,892e-3	5,68e-12	2,395e-5	-2,396e-5	4,791e+0	-2,96e+2	cero1	0,002898

en que x = λmáx * T y el valor 0,014388 = h c/k, en que h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y k la constante de Boltzmann.

Al introducir la expresión anterior en nuestra planilla de cálculo, luego de rellenar los correspondientes espacios, al introducir el valor inicial de 1,00 en la fila once aparece el valor de dicha constante: 0,002898, que coincide con el valor buscado.

Conclusiones:

Si bien existen programas específicos que permiten hacer este tipo de cálculos con gran rapidez y precisión (por ejemplo: Eureka, Cabri, Derive, Matlab etc.), éstos poseen escasa divulgación, pues pocas instituciones los poseen y además pocas personas los conocen, por ello este estudio tiene la gracia de no requerir más que una planilla de cálculo, la que esta presente en casi la totalidad de los computadores actuales y cuyo uso es conocido por un significativo universo de usuarios.

Existen en Internet simuladores construidos en Java en los que uno ingresa una función, su derivada y un punto cualquiera, y el sistema dibuja la función, entrega los ceros y el número de iteraciones necesarios para encontrarlos. Una de estas direcciones son http://users.ox.ac.uk/~heg/cmer/newton.htm. Otras direcciones entregan programas en lenguaje C para resolver el método de Newton-Raphson como en http://www.diffpack.com/Diffpack/refmanuals/current/NewtonRaphson.html.
Recordemos que nuestra aplicación requiere sólo ingresar la función y un punto desde donde comenzar a iterar.

Resulta también posible implementar en la misma hoja de cálculo ambos procedimientos y obtener en forma simultánea los ceros y los extremales, no obstante esto obliga a emplear un mayor número de columnas que al sólo interesar el cálculo de uno de los aspectos considerados, podrían dificultar la comprensión de dicho proceso.

También resulta interesante en cursos avanzados sobre uso de planilla de cálculo ya que implica el empleo de funciones lógicas con una aplicación de interés para alumnos de ingeniería.

El uso de este procedimiento permite clarificar el concepto de derivada desde una perspectiva diferente.

Lo simple y rápido del procedimiento, permite la aplicación de este tipo de cálculos durante el desarrollo de una clase de física, en que el resultado puede ser de interés pero lo tedioso del aquél hace que el profesor presente el resultado en lugar de permitir que sus alumnos lo descubran (algunos ejemplos son: problemas de potencial efectivo, proyectiles, etc.).

Esta aplicación devuelve al computador su importancia en la solución de problemas de cálculo numérico, aplicación para la que se inventara y que casi ha pasado al olvido.

Bibliografía:

1. http://www.shodor.org/UNC/math/newton/index.html
2. http://ns.fim.utp.ac.pa/Laboratorios/labMetNum/newton.html
3. Hardy,G.H. "Curso de Análisis Matemático". Edit. Nigar S.R.L.. 1962.
4. Microsoft "Manual de Office 97". 1998.
5. Claris Work 4.0 "Tutorial"
6. R Burden, J Douglas "Análisis Numérico" International Thomson Editores 1998