La fórmula de Wallis y el cálculo de "volúmenes" de bolas unitarias en $\mathbb{R}^n$

Genaro Castillo Guzmán[1]
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

En la primera parte de este trabajo se establecerá la fórmula de Wallis (matemático inglés 1616-1703) para el número π como el límite de una sucesión muy especial. Aunque esta hermosa fórmula no está directamente relacionada con lo que viene a continuación, si lo están sus precedentes: dos sucesiones definidas a través de integrales de potencias de $\sin x$.

A nosotros, los involucrados en la enseñanza de la matemática, por el continuo roce con algunos de sus objetos se nos hacen familiares y a veces aminoran la capacidad de asombro y parece algo casi natural que el área de un disco de radio r sea πr^2, y el volumen de una bola sea $\frac{4}{3}\pi r^3$, en último caso renunciamos al ente inquisitivo y lo adjuntamos a la frágil memoria. Aquí refrescaremos esos resultados y mediante una audaz extrapolación nos lanzaremos al abordaje en "canicas"de $I\!R^4$ y de ahí a $I\!R^n$.

¿Existirá algún inédito de Borges, hincha de los imposibles, donde sugiera como chutear un siútico penalty con una bola de $I\!R^4$? (ya es complicado hacerlo en $I\!R^3$ con una bola de $I\!R^2$).

De todas maneras no son tan inalcanzables las cosas que vamos a desarrollar, necesitamos saber que la derivada de $\cos x$ es $-\sin x$, inducción, cambio de variable en integración e integración por partes.

Seamos concretos: mediante integración por partes y usando inducción matemática, para $n = 1, 2, \cdots$ se puede establecer la fórmula

$$I_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ \cdots \ (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad \cdots \quad 2n}$$

En efecto, si $n = 1$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[1] e-mail: gcastill@pehuenche.utalca.cl

Supongamos la fórmula válida para n, entonces

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \sin^2 x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x(1-\cos^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x\,dx \end{aligned}$$

Esta última integral la realizaremos por partes.

Escribimos

$$\begin{aligned} u = \cos x &\longrightarrow du = -\sin x\,dx \\ dv = \sin^{2n} x \cos x\,dx &\longrightarrow v = \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx - \left(\frac{\cos x \sin^{2n+1} x}{2n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+2} x}{2n+1}\,dx \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx - 0 - \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx \end{aligned}$$

Cambiando la integral del lado izquierdo al derecho de la igualdad, y factorizando

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$$

Usando la hipótesis de inducción

$$\frac{2n+2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad \cdots\ (2n)}$$

Despejando

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6\ \cdots\ (2n)(2n+2)}$$

y la fórmula se considera demostrada para todo número natural n.

De manera análoga, para $n = 1, 2, \cdots$ se puede verificar la fórmula

$$I_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \quad \cdots \quad (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Como en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \le \sin x \le 1$, resulta la cadena de desigualdades

$$0 \le \sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le 1$$

La integral entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ conserva esta cadena

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx$$

es decir

$$0 < I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$$

Dividiendo por I_{2n}

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$$

pero

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad \cdots \quad (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad \cdots \ (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

de donde

$$\frac{2n+1}{2n+2} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$$

De este sandwich se obtiene que si $n \to +\infty$ entonces $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \longrightarrow 1$

Ahora,

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2 \cdot 4 \quad \cdots \quad (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \quad \cdots \quad (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

Multiplicando esta igualdad por π

$$\pi \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \quad \cdots \quad (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad \cdots \quad (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

Es fácil ver que $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$ y que $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, y los productos se pueden expresar en forma más concisa

$$2 \cdot \frac{2^n n!}{\frac{(2n)!(2n+1)}{2^n n!}} \frac{2^n n!}{\frac{(2n)!}{2^n n!}} = \frac{2^{4n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} = \pi \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

Como $\quad \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \longrightarrow 1$, resulta

$$\boxed{\text{lím}_{n\to+\infty} \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} = \pi}$$

La convergencia es bastante lenta pero la expresión es muy bonita.

Ahora buscaremos maneras de relacionar estos resultados con áreas y volúmenes de bolas unitarias.

Por bola unitaria en el espacio $I\!R^n$, respecto a la métrica euclideana, entenderemos

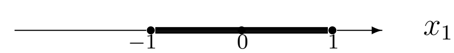
$$B_n(1) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n \ / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

y por bola de radio $r > 0$ en $I\!R^n$ a

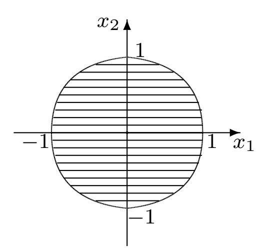
$$B_n(r) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n \ / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}$$

Ejemplo 1. *Las bolas unitarias en* $I\!R$, $I\!R^2$, $I\!R^3$ *son, respectivamente*

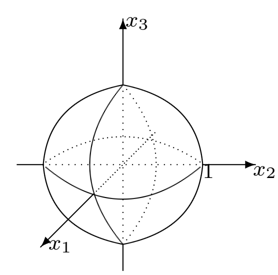
$$B_1(1) = \{x_1 \in I\!R \ / \ x_1^2 \leq 1\}$$



$$B_2(1) = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$



$$B_3(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$



Si $A \subset I\!R^n$ y r es un número positivo se define

$$rA := \{r(x_1, \cdots, x_n) \ / \ \text{ para todo } \ (x_1, \cdots, x_n) \in A\}$$

La intuición nos dirá que si $r > 1$, entonces el conjunto A se expande uniformemente (mantiene forma original); si $r < 1$, el conjunto A se comprime uniformemente; si $r = 1$, entonces el conjunto A no sufre modificaciones.

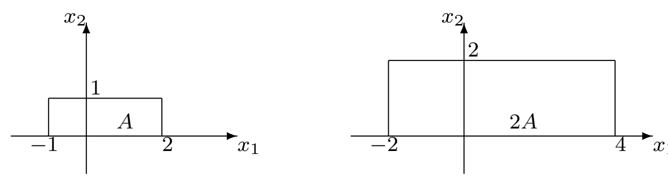
Ejemplo 2. *Si A es el rectángulo en $I\!R^2$,*

$$A = [-1, 2] \times [0, 1]$$

entonces

$$2A = [-2, 4] \times [0, 2]$$

es el rectángulo de la derecha.



Ejemplo 3. *Si $A = B_n(1)$ es la bola unitaria en $I\!R^n$, entonces $rA = B_n(r)$ es la bola unitaria de radio r en $I\!R^n$*

Cuando trabajamos en $I\!R$ y A es el intervalo $[a, b]$, entonces para el número $(b - a)$ usamos la palabra "largo"; si estamos en $I\!R^2$ y $A = [-1, 2] \times [0, 1]$ para el número $3 \cdot 1 = 3$ usamos la palabra "área"; si $A = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ en $I\!R^3$ al número $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ le llamamos "volumen".

En general, admitamos que a ciertos sub-conjuntos A de $I\!R^n$ se les puede asignar un número real que llamaremos *volumen* o *contenido*, lo anotaremos $vol(A)$ sin importar la dimensión del espacio donde está sumergido A.

Para poder continuar vamos a tener que aceptar el siguiente resultado:

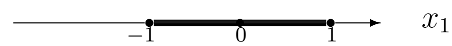
Si A es un subconjunto de $I\!R^n$ cuyo volumen existe, entonces $vol(rA) = r^n vol(A)$

Al menos observe que en el ejemplo 2, $vol(A) = 3 \cdot 1 = 3$, y $vol(2A) = 6 \cdot 2 = 12 = 2^2 vol(A)$. Además, bastará calcular el volumen de la bola unitaria en $I\!R^n$ para obtener el volumen de la bola de radio r en $I\!R^n$ por la fórmula

$$vol\,(B_n(r)) \ = \ vol\,(rB_n(1)) = r^n vol\,(B_n(1)) \tag{1}$$

- Si $n = 1$ la bola unitaria es

$$B_1(1) = \{x_1 \in I\!R \ / \ x_1^2 \leq 1\}$$



además,

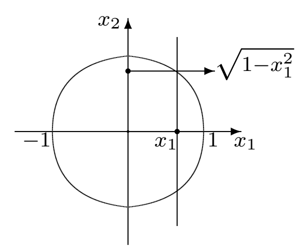
$$vol(B_1(1)) = 1 - (-1) = 2 \qquad \text{(largo)}$$

Por la relación (1)

$$vol(B_1(r)) = 2r$$

- Si $n = 2$ la bola unitaria es $B_2(1) = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

Si cortamos el disco por una recta paralela a x_2 que pase por x_1 con $-1 \leq x_1 \leq 1$ se produce un intervalo de radio $\sqrt{1 - x_1^2}$, su "largo"será $B_1(\sqrt{1 - x_1^2}) = 2\sqrt{1 - x_1^2}$. Además, se acepta como área de $B_2(1)$ a



$$vol(B_2(1)) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \, dx_1 = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x_1^2} \, dx_1$$

Esta integral se puede interpretar como la integral de una bola de radio $\sqrt{1 - x_1^2}$ pero en un espacio de dimensión una unidad inferior al que se está tratando.

Para relacionarlo con las fórmulas de los I_n de Wallis, hacemos el cambio de variable $x_1 = \cos x$, entonces si $x_1 = 0$ se tiene $x = \frac{\pi}{2}$; y si $x_1 = 1$ resulta $x = 0$. Además, $dx_1 = -\sin x \, dx$. Luego,

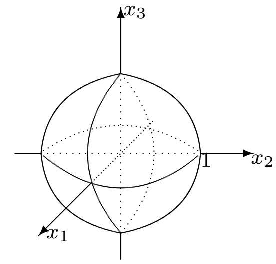
$$\begin{aligned} vol(B_2(1)) &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2 \sin x (-\sin x) \, dx \\ &= 2 \cdot 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \\ &= 2 \, vol(B_1(1)) \, I_2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi \qquad \text{(área)} \end{aligned}$$

Por la relación (1)

$$vol(B_2(r)) = \pi r^2$$

- Si $n = 3$ la bola unitaria es $B_3(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

  Al cortar la bola unitaria de $I\!R^3$ por un plano paralelo a x_2x_3 que pase por x_1 con $-1 \leq x_1 \leq 1$ la sección que se produce en la bola es un disco de radio $\sqrt{1-x_1^2}$, así que su área será $\pi(\sqrt{1-x_1^2})^2$ (por el caso $n = 2$).
  Luego,



$$\begin{aligned} vol(B_3(1)) &= \int_{-1}^{1} \pi \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^2 \, dx_1 \\ &= 2vol(B_2(1)) \int_0^1 vol\left(B_2\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)\right) \, dx_1 \end{aligned}$$

Otra vez podemos interpretar esta integral como la integral de una bola de radio $\sqrt{1-x_1^2}$ pero en un espacio de dimensión una unidad inferior al estudiado.

La integral en cuestión se puede calcular directamente pero para relacionarlo con las fórmulas de los I_n de Wallis, hacemos el cambio de variable $x_1 = \cos x$, entonces $x_1 = 0 \ \longrightarrow \ x = \frac{\pi}{2}$; si $x_1 = 1 \ \longrightarrow \ x = 0$, además $dx_1 = -\sin x \, dx$.

Luego,

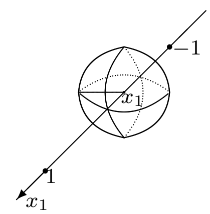
$$\begin{aligned} vol(B_3(1)) &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi \sin^2 x(-\sin x) \, dx \\ &= 2\, vol(B_2(1)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \\ &= 2\, vol(B_2(1))\, I_3 \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{(volumen)} \end{aligned}$$

Por la relación (1)

$$vol(B_3(r)) = \frac{4\pi}{3}\, r^3$$

- Si $n = 4$; en la búsqueda de apoyos para convencer a un interlocutor o convencerse a sí mismo, hacemos referencia a los gráficos o figuras pero cuando $n \geq 3$ ésto se nos complica, así que vamos a hacer el último intento incluso vamos a sofisticar el lenguaje:

Si cortamos la bola unitaria de $I\!\!R^4$ por un "hiperplano" paralelo al hiperplano $x_2x_3x_4$ que pase por x_1 con $-1 \leq x_1 \leq 1$, la hipersección que se produce en la bola de $I\!\!R^4$ es una bola de $I\!\!R^3$ de radio $\sqrt{1-x_1^2}$, así que su volumen será $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{1-x_1^2})^3$ (por el caso $n=3$).



Luego,

$$vol(B_4(1)) = \int_{-1}^{1} B_3\left(\sqrt{1-x_1^2}\right) dx_1 = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^3 dx_1$$

La sustitución $x_1 = \cos x$ convierte a esta integral en

$$vol(B_4(1)) = 2\, vol(B_3(1))\, I_4 = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{\pi^2}{2}$$

Por la relación (1)

$$vol(B_4(r)) = \frac{\pi^2}{2} r^4$$

- Siguiendo con este proceso se puede inferir que para $n \geq 2$

$$vol(B_n(1)) = 2\, vol(B_{n-1}(1))\, I_n$$

Para simplificar esta notación tan ampulosa, definamos $a_n := vol(B_n(1))$. La relación precedente establece

$$a_n = 2a_{n-1}I_n \tag{2}$$

Nuestro objetivo será ahora buscar una fórmula para a_{2n}

De (2) se deducen todas estas igualdades

$$a_{2n} = 2a_{2n-1}\, I_{2n} \quad , \quad a_{2n-1} = 2a_{2n-2}\, I_{2n-1}$$

$$a_{2n-2} = 2a_{2n-3}\, I_{2n-2} \quad , \quad a_{2n-3} = 2a_{2n-4}\, I_{2n-3}$$

Dividiéndolas convenientemente

$$\text{(i)} \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-3}} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}} \qquad ; \qquad \text{(ii)} \quad \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-3}} = \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-4}} \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-3}}$$

Reemplazando (ii) en (i), se obtiene

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-4}} \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-3}} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}}$$

Reemplazando los I_n de acuerdo con su definición se llega a

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-4}}$$

Esta relación permite expresar

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \frac{a_4}{a_2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \ (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \quad \cdots \quad n} = \frac{\pi^2}{2\pi} \cdot \frac{2}{n} = \frac{\pi}{n}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{a_6}{a_4} &= \frac{\pi}{3} \\ \frac{a_8}{a_6} &= \frac{\pi}{4} \\ \vdots\ & \quad \vdots \\ \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} &= \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

Multiplicando ambas columnas y simplificando

$$\begin{aligned} \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{a_8}{a_6} \cdots \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdots \frac{\pi}{n} \\ \frac{a_{2n}}{a_4} &= \frac{\pi^{n-2}}{3 \cdot 4 \cdots n} \end{aligned}$$

Como $a_4 = \frac{\pi^2}{2}$

$$a_{2n} = \frac{\pi^{n-2}}{3 \cdot 4 \ \cdots n} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^n}{n!}$$

Se obtiene así la fórmula

$$\boxed{vol(B_{2n}(1)) = \frac{\pi^n}{n!}}$$

Se invita a verificar que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{2\pi}{2n+1}$$

lo que conduce a

$$a_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

o sea

$$\boxed{vol(B_{2n+1}(1)) = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}}$$

Por último, observe que

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$$

No le parece sorprendente que a medida que aumenta la dimensión el volumen de la bola unitaria respectiva se haga cada vez más pequeño? Respuesta: si! ... *se puede encontrar una poesía debajo de una piedra.*