El problema de la Duplicación del Cubo

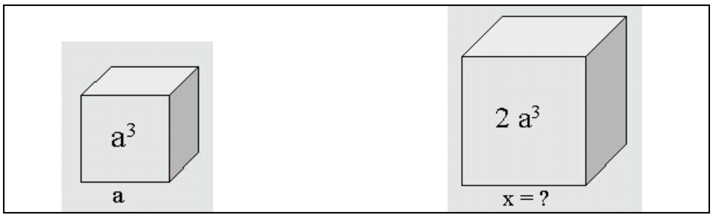
Juana Contreras S.[8]
Claudio del Pino O.[9]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Como es natural, la resolución de problemas ha jugado un rol fundamental en el desarrollo de la matemática. El trabajo realizado por muchos matemáticos profesionales y aficionados, de diferentes épocas, por resolver problemas surgidos de diversos ambientes y de la matemática misma, han contribuido a su evolución.

Tres famosos problemas en el ámbito de la geometría elemental que cautivaron el interés de los geómetras griegos de la antigüedad (siglo VI aC) e hicieron historia en la Matemática, son:

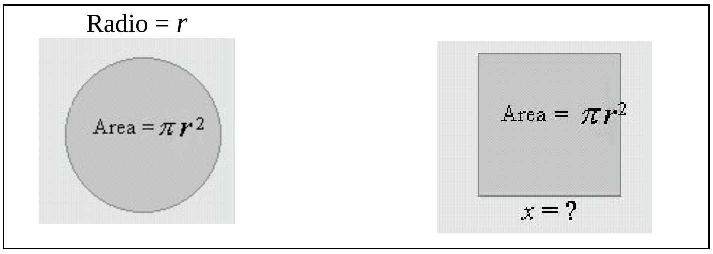
La duplicación de un cubo. Dado un cubo de arista *a*, el problema consiste en construir usando sólo una regla y un compás, la arista ***x*** de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo dado.



La trisección de un ángulo. Usando sólo una regla y un compás, dividir un ángulo en tres ángulos iguales.

La cuadratura del círculo. Dado un círculo de radio *r*, construir usando sólo una regla y un compás el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área del círculo dado.

[8] e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[9] e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl



Estos problemas se presentaron naturalmente en un estudio sistemático de la geometría, como problemas que podían resolverse usando sólo la regla y el compás. Pero, a medida que pasaban los años y no se encontraban soluciones, atrajeron una atención creciente. La regla (sin marcas) y el compás, son las herramientas básicas de construcción de la geometría euclidiana. Sin embargo, no todos los problemas de construcciones geométricas imaginables se pueden resolver usando únicamente estos instrumentos, lo que no significa que éstos sean imposibles de resolver, sino que, en algunos problemas se precisa necesariamente de otros instrumentos para resolverlos.

Los griegos de la antigüedad y muchos geómetras a lo largo de la historia, no pudieron resolver los problemas descritos usando sólo la regla y el compás, pero en los intentos por resolverlos, desarrollaron variados métodos y mecanismos muy ingeniosos.

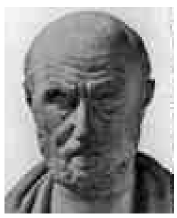
Sobre el problema de la duplicación del cubo

Conocido también como el *problema de Delos*. Según cuenta la leyenda, hacia el año 430 aC ocurría en Atenas una terrible epidemia de peste, y ante la impotencia de combatirla, los atenienses consultaron el oráculo del dios Apolo, cuyo altar se encontraba en la isla de Delos. Éste mandó duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía la forma de un cubo, dando origen al problema de la *duplicación del cubo*.

Este problema inquietó por mucho tiempo a los geómetras griegos y de épocas posteriores, que pretendían construir con regla y compás la raíz cúbica de 2, puesto que estos instrumentos permitían la construcción de raíces cuadradas. Sin embargo, el *problema de Delos* requería del empleo de herramientas y técnicas diferentes.

En los numerosos intentos por resolverlo, se idearon nuevos métodos, se crearon interesantes curvas e instrumentos mecánicos, que entregaban una aproximación de la raíz cúbica de 2, algunos de los cuales se presentan a continuación.

a) Reducción del problema a dos medias proporcionales.



Hipócrates de Chíos (470–410 aC) demostró que el problema se podía reducir a encontrar dos medias proporcionales.

En efecto, dado un segmento de longitud a, encontrar un segmento de longitud x tal que $x^3=2a^3$ era equivalente a encontrar dos segmentos x e y, tales que x e y son medias proporcionales entre a y $2a$:

$$a : x = x : y \qquad \text{y} \qquad x : y = y : 2a$$

Así:

$$\frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{2a}\right) = \frac{1}{2}$$

Hipócrates enunció un problema más general, conocido como el *problema de las dos medias proporcionales* que consiste en, dados dos segmentos a y b, encontrar dos segmentos x e y tal que $a : x = x : y = y : b$.

Desafortunadamente, no se encuentran registros de la construcción las dos medias proporcionales realizada por Hipócrates, si es que la obtuvo.

b) Solución de Platón.

Platón[10] (429-347 aC) resolvió el problema de las medias proporcionales, creando un instrumento mecánico formado por dos reglas paralelas, una regla fija y una móvil.

Esta última se puede deslizar paralelamente a la regla fija, entre dos soportes fijos perpendiculares a la recta fija. Ver *figura b*-1.

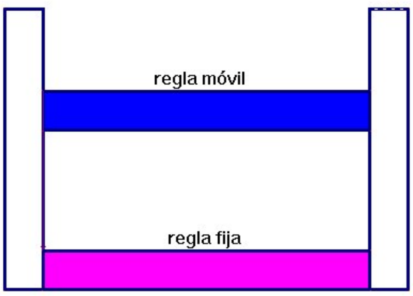


Figura b-1

El principio de uso de este instrumento, para determinar las dos medias proporcionales entre la medida de la arista del cubo original a y un segmento de medida $2a$, es el siguiente:

- Construir la figura formada por dos rectas perpendiculares entre sí, en la que se encuentran el segmento OA de medida a, y el segmento OB, tal que $OB = 2\,OA$. Ver *figura b*-2.

[10] Platón nació en Atenas, Grecia, en el año 427 aC y murió en 347 aC. El nombre real de Platón era Aristocles.

- Colocar este instrumento encima de la figura ajustándolo cuidadosamente, como en la *figura b*-3.

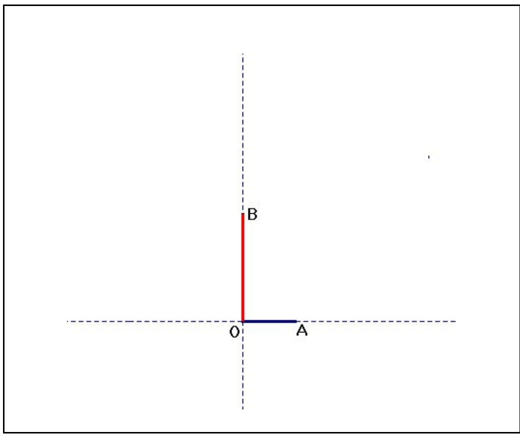


Figura b-**2**

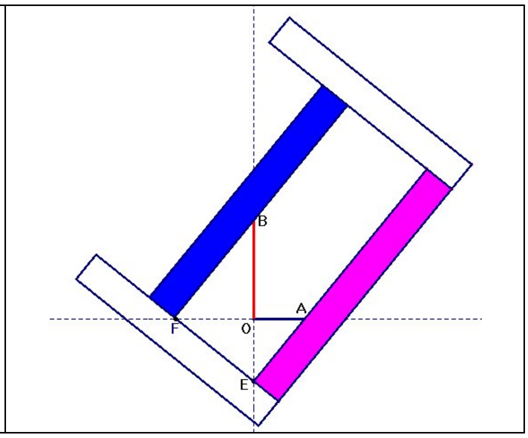


Figura b-**3**

Así, se resuelve *mecánicamente* el problema comentado.

En efecto, en el triángulo rectángulo *AEF* en *E*, se obtiene la relación $\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OF}$, y en el triángulo rectángulo *EFB* en *F*, la relación $\frac{OE}{OF} = \frac{OF}{OB}$. Luego, $\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OF} = \frac{OF}{OB}$.

De esta última se obtiene $OE^3 = 2\ OA^3$, relación que expresa que, un cubo de arista *OE* tendrá el doble del volumen de un cubo de arista *OA*.

c) La solución de Arquitas

La solución de Arquitas[11] (428-350 aC) para la duplicación del cubo, es una de las más notables (por supuesto, no con regla y compás), ya que utiliza superficies tridimensionales.

Arquitas resolvió el problema general de las dos medias proporcionales entre dos segmentos ***a*** y *b*. La solución la obtuvo de intersectar tres superficies de revolución: un cono recto, un cilindro y un toro colocadas juntas en un mismo sistema.

Las superficies las construyó según el esquema de la *figura c*-1, donde los segmentos *AB* (cuerda) y *AC* (diámetro) tienen medidas dadas ***a*** y *b* respectivamente.

Haciendo girar una circunferencia de diámetro *AC* perpendicular al plano de la circunferencia *ABC*, en torno a la recta que pasa por A perpendicular al plano *ABC*, se genera un toro de diámetro interior nulo. El cilindro recto se construye con la circunferencia *ABC* como base, que intersecta al toro en una curva *S*. Por el punto *C* se traza la tangente a la circunferencia

[11] Arquitas de Tarento, nació alrededor del año 428 aC en Tarento (ahora de Italia) y murió alrededor de 350 aC.

ABC que intersecta a la recta *AB* en el punto *D*. Girando la recta AB en torno a *AC* como eje, se genera un *cono circular recto*, con vértice en *A*.

Considerando *b=2a*, el segmento *AM*, donde *M* es un punto de intersección del cono y la curva *S*, resuelve el problema de la duplicación del cubo.

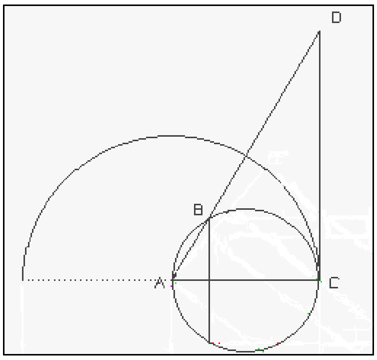


Figura c-1

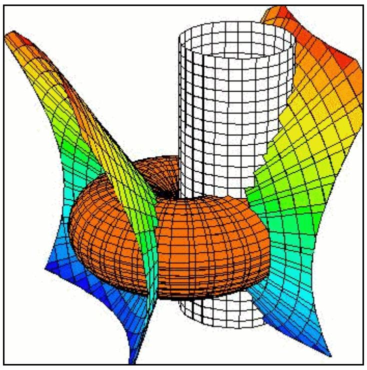


Figura c-2

Considerando $b=2a$, con la notación actual de geometría cartesiana, las ecuaciones de estas superficies serían: $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$ (para el cono), $x^2+y^2=2ax$ (para el cilindro), $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ (para el toro), siendo *a* la medida de la arista del cubo original. Ver *figura c*-2.

De estas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2a}$$

Denotando por *AB* y *AC* los segmentos de medidas *a* y 2*a* respectivamente, y *AM* y *AP* los segmentos cuyas medidas son medias proporcionales entre *a* y 2*a*, se obtiene:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AC}$$

de donde, la medida del segmento *AM* es $a\sqrt[3]{2}$.

Aunque Arquitas resolvió este complejo problema usando relaciones y construcciones geométricas, él utilizó *más* que una regla y un compás.

d) Solución de Menecmo

Menecmo (~375- 325 aC), alrededor del año 350 aC se ocupó de resolver el problema de la duplicación del cubo. En sus intentos por resolverlo, descubrió las cónicas, realizando importantes trabajos sobre estas curvas, que definió como intersecciones de un plano con un cono (secciones cónicas). El problema lo redujo, al igual que Hipócrates, a encontrar *x* e *y*, tal que $a : x = x : y = y : 2a$.

En la notación actual, el problema de encontrar x e y, que resultaban de la intersección de dos parábolas, o bien de una parábola y una hipérbola equilátera, se pueden describir mediante ecuaciones usando geometría cartesiana:

$$x^2=ay,\quad y^2=2ax, \text{ de donde } x^3=2\,a^3 \qquad (\textit{figura } d\text{-}1)$$

$$x^2=ay,\quad xy=2a^2, \text{ de donde } x^3=2\,a^3 \qquad (\textit{figura } d\text{-}2)$$

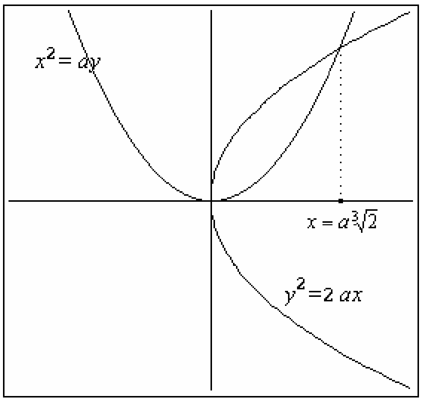


Figura d-1

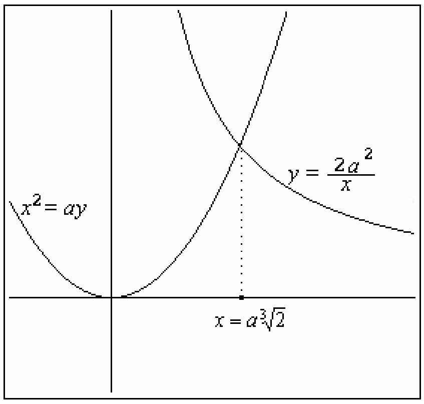


Figura d-2

e) Solución de Eratóstenes.

En la obra *Colección de matemática* de Pappus de Alejandría (siglo IV dC) se citan muchos instrumentos que se habían creado con el propósito de resolver mecánicamente el problema. Entre éstos se encuentra el *mesolabio*, máquina creada por Eratóstenes[12] (275-194 aC).

El *mesolabio* permite calcular las medias proporcionales de Hipócrates, mediante un procedimiento mecánico. El principio de este instrumento se basa en el uso reiterado del Teorema de Thales.

El mesolabio está compuesto de una plancha rectangular rígida *ABXY* y de tres rectángulos congruentes *ABFM*, *NGHQ* y *RKJT*. El rectángulo *ABFM* fijo y los rectángulos *NGHQ* y *RKJT* movibles, los que se pueden deslizar a lo largo del rectángulo *ABXY*, como en la *figura e*-1. Para resolver el problema de la duplicación del cubo de arista a, se construye de manera que la medida de AB sea $2a$.

12 Eratóstenes nació en Cyrene en el año 276aC (N..de Africa, ahora Libia) y murió en Alejandría, Egipto, en 194 aC.

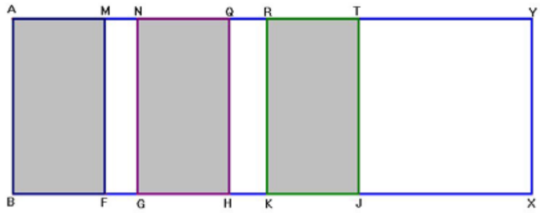


Figura e-1

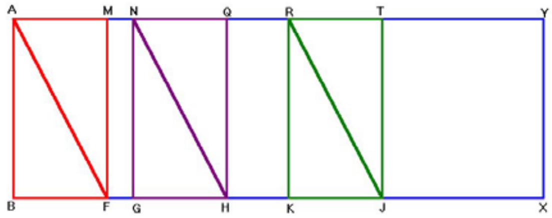


Figura e-2

La solución del problema con este instrumento se obtiene de la siguiente manera:

- Se trazan las diagonales *AF*, *NH* y *BJ* (figura e-2). Notar que $AF \,||\, NH \,||\, BJ$.
- Sea *E* el punto medio de *TJ*. Luego, la medida de *EJ* es *a*.
- Se desliza el segundo rectángulo hasta que *NH* intersecte al lado *MF* del primer rectángulo, denotando por *C* a este punto.
  Simultáneamente, se desliza el tercer rectángulo hasta que *RJ* intersecta al lado *QH* del segundo rectángulo, denotando por *D* a este punto. Ver *figura e*-3.

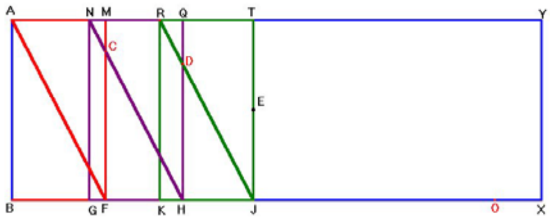


Figura e-3

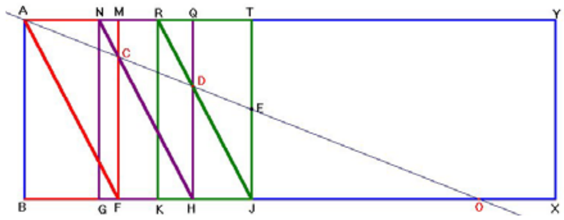


Figura e-4

- Se deslizan el segundo y el tercer rectángulo hasta una posición en que los puntos *A*, *C*, *D* y *E* estén alineados. Ver *figura e*-4. Estando en esta posición, se construye el punto *O*, punto de intersección de la recta *AE* y la recta *BX*.

Aplicando el teorema de Thales, varias veces, se obtiene:

$$\left[\frac{AB}{CF}\right]=\frac{BO}{FO}=\frac{AO}{CO}=\frac{AF}{CH}=\frac{FO}{HO}=\left[\frac{CF}{DH}\right]=\frac{CO}{DO}=\frac{HO}{JO}=\left[\frac{DH}{EJ}\right]$$

de donde:

$$\frac{AB}{CF}=\frac{CF}{DH}=\frac{DH}{EJ}$$

Denotando por *x* la medida de *DH* y por *y* la medida de *CF*, se obtiene que $x=a\sqrt[3]{2}$.

f) La Cisoide de Diocles

Es la cisoide más famosa, y fue estudiada por Diocles[13] (240-180 aC). La construcción más simple de la cisoide recta es: dadas dos rectas paralelas *L* y *L'* y un punto O en *L'*. Sea *P* un punto variable en la recta *L*, sea *K* la proyección ortogonal de *P* sobre *L'*, y sea *M* la

[13] Diocles, matemático griego, contemporáneo de Apolonio.

proyección ortogonal de K sobre la recta OP. La cisoide recta es el lugar geométrico del punto M cuando P se desplaza en la recta L. Ver *figura f*-1.

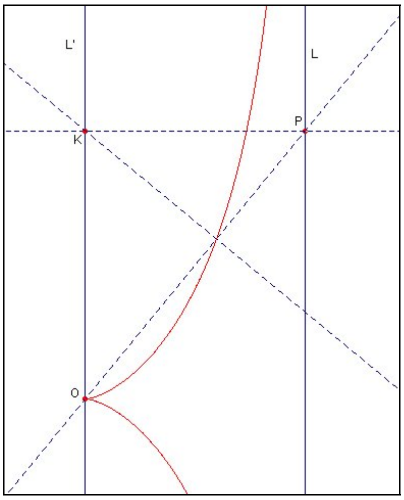


Figura f-1

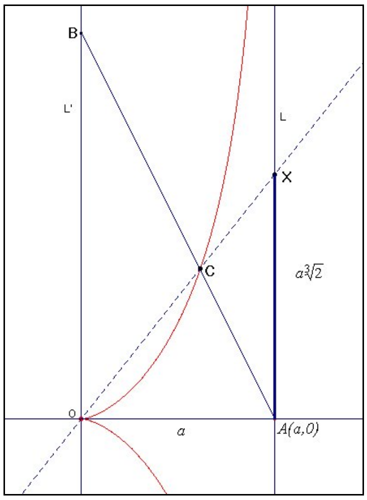


Figura f-2

La cisoide de Diocles permite *duplicar el cubo*. En efecto, sea A el punto de coordenadas $(a,0)$. Si B es el punto de coordenadas $(0,2a)$ y C es el punto de intersección de la cisoide con la recta AB, las coordenadas del punto X, punto de intersección de la recta OC con la recta L, son $(a,\ a\sqrt[3]{2}\,)$. Ver *figura f*-2.
La ecuación cartesiana de esta cisoide recta es $x(x^2 + y^2) = ay^2$.

g) La Concoide de Nicomedes.

Una descripción de la concoide de Nicomedes[14] es la siguiente. Dadas una recta L (recta base) un punto A (polo) exterior a la recta y un segmento de medida fija d (módulo).

Sea Q un punto en la recta L. Sea P un punto en la recta AQ, tal que la medida de PQ es d.

El lugar geométrico de P cuando Q se desplaza en la recta L, es una rama de la concoide. La otra rama se obtiene construyendo el lugar geométrico del punto P', simétrico de P respecto del punto Q. Notar que la curva depende de d y de la posición de A. Ver *figuras g*-1 y *g*-2.

[14] Nicomedes, matemático griego, nació en el año 280aC y murió en el año 210 aC.

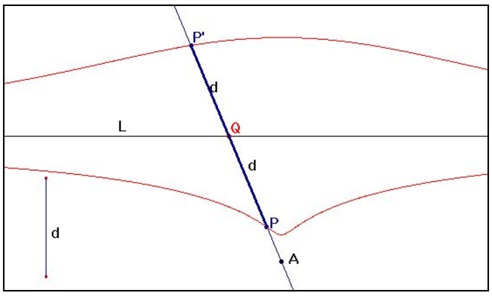


Figura g-1

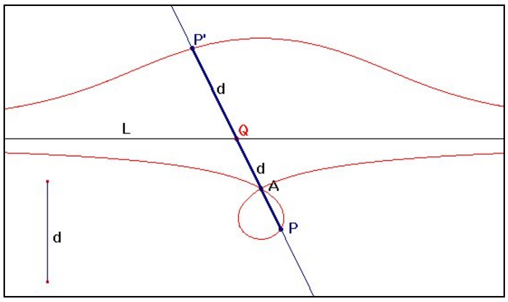


Figura g-2

Esta curva permite resolver el problema de las dos medias proporcionales. En efecto, dado un segmento de medida *a*.

- Se construye un rectángulo *OABC*, tal que *OA* mide a y *AB* mide 2*a*.
- Sea *E* el punto medio de *OA*
- Sea *V* la circunferencia de centro *O* y radio *a* que intersecta a *OA* en el punto *H*.
- La simetral de *OA* intersecta a la circunferencia *V* en un punto *G* (en el semiplano que no contiene a *B*).
- Se construye por *A* la recta *L* paralela a *GH*.

Con *L* como recta base, el punto *G* como polo y la medida *a*, se construye la concoide de Nicomedes.

Sea *P* el punto de intersección de una rama (opuesta a *G*) de la concoide con la recta que contiene al lado *OA* del rectángulo. Ver *figura g*-3. La recta *PB* corta a *OC* en un punto *M*. Este punto es tal que, la medida de *MC* es $a\sqrt[3]{2}$.

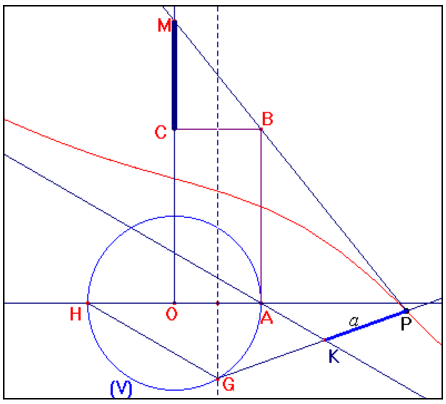


Figura g-*3*

Muchas soluciones se dieron a este problema, pero en todas se usaba algo más que una regla y un compás.

Sobre la imposibilidad de su resolución

Siguiendo en el tiempo, el problema fue abordado por Descartes (1596-1650) en el año 1637, luego por Gauss (1777-1855). Sin embargo, hasta el siglo XIX los tres problemas mencionados, aún no estaban resueltos. Fue Wantzel (1814-1848) quien demostró la imposibilidad de resolver el problema de la duplicación del cubo, así como el problema de la trisección de un ángulo, usando únicamente regla y compás.

Pierre-Laurent Wantzel, matemático francés (1814-1848) estudió los trabajos de Viète, de Descartes y de Gauss, y se interesó de manera muy especial en los problemas de construcciones geométricas en el sentido de Euclides, con regla y compás. Basándose en los resultados de Abel relativos a ecuaciones algebraicas, Wantzel demostró (en 1837) en su memoria titulada *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas,* el siguiente teorema:

Todo número construible x debe ser raíz de un polinomio con coeficientes enteros, tal que, el mínimo grado de un polinomio que admite a x como raíz, es una potencia de 2.

En palabras más simples, los números construibles con regla y compás son aquellos que pueden escribirse por medio de las cuatro operaciones elementales y raíces cuadradas. Dicho de otra manera, un problema puede ser resuelto con regla y compás, si y sólo si, la incógnita puede ser expresada en función de los datos mediante una expresión algebraica racional o irracional cuadrática.

Como consecuencia del teorema de Wantzel, el número $\sqrt[3]{2}$ no es un construible, ya que este número es raíz de la ecuación cúbica $x^3=2$, y por lo tanto el problema de la duplicación del cubo no es resoluble con regla y compás.

Nota. Las imágenes que aparecen en este trabajo, en su mayoría, se construyeron con el programa Cabri-geométrico II.

Referencias

[1] Courant R, Robbins H. [1962]. *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar.
[2] González, M. [1965]. *Complementos de Geometría*. Minerva Books Ltda.
[3] Shively, Levi. [1968]. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía Editorial Continental, S.A.
[4] Rivest F., Zafirov S. *Duplication of the cube*. Sitio Internet: http://www.cs.mcgill.ca/~cs507/projects/1998/zafiroff/