Acerca del problema de la trisección de un ángulo

Juana Contreras S.[1]
Claudio del Pino O.[2]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Desde la época de Euclides, se encuentran establecidas las estrictas normas sobre construcciones geométricas. Estas construcciones deben realizarse mediante intersecciones de rectas, de circunferencias y de rectas con circunferencias, donde los instrumentos permitidos son una regla (sin marcas) y un compás, los que pueden usarse un número finito de veces. Los tres problemas clásicos de construcciones geométricas, propuestos por los geómetras griegos y que no pudieron resolver con regla y compás, son:

- *La cuadratura del círculo*. Dado un círculo de radio r, construir geométricamente el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área del círculo dado.
- *La duplicación del cubo*. Dado un cubo de arista a, construir geométricamente la arista $\boldsymbol{x}$ de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo dado.
- *La trisección del ángulo*. Dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales, usando solamente una regla y un compás.

La simpleza y sencillez de sus enunciados motivaron a muchos matemáticos y aficionados, que en los intentos por resolverlos contribuyeron con importantes resultados para la matemática. Sin embargo, a pesar de los muchos intentos, permanecieron abiertos hasta el siglo XIX. Estos problemas se pueden resolver agregando nuevos elementos o usando instrumentos mecánicos, pero el problema era resolverlos con las restricciones impuestas por los geómetras griegos.

En este trabajo se presentarán algunos métodos alternativos, que se han utilizado, para resolver el problema de la trisección del ángulo.

La trisección del ángulo

El problema de la trisección de un ángulo consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales usando regla (sin marcas) y compás.

De los tres problemas clásicos, este problema es el menos famoso, debido quizás a que no existen antecedentes sobre su origen, y por otra parte, difiere de los otros dos problemas, puesto que con los instrumentos de construcción se podían trisecar ciertos ángulos, por ejemplo el

[1] e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[2] e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

ángulo recto. En cambio, no se puede cuadrar ningún círculo ni duplicar ningún cubo, mediante construcciones geométricas.

Es posible que, la construcción de polígonos regulares contribuyera a aumentar el interés por el problema, puesto que bisecar un ángulo permitía construir polígonos con el doble del número de lados que uno dado, y la posibilidad de dividir un ángulo en tres partes iguales, permitiría construir polígonos con el triple del número de lados que uno dado.

Aunque el problema de la trisección de un ángulo cualquiera no podía ser resuelto usando solamente regla y compás con las estrictas normas de las construcciones geométricas de los griegos, desde esa época, se tiene conocimiento de muchos intentos por resolver el problema y de soluciones al problema utilizando otros recursos.

A continuación se presentan algunas soluciones alternativas al problema de la trisección de un ángulo:

- Solución de Arquímedes.
- Un método aproximado.
- Con instrumentos mecánicos.
- Mediante curvas.

Solución de Arquímedes

Arquímedes descubrió una manera de trisecar un ángulo, una de las más ingeniosas que se conoce, usando un compás y una regla con dos marcas (no es la regla euclidiana).

A continuación se describen los pasos a seguir para trisecar un ángulo usando estos instrumentos. Dado un ángulo AOX (figura 1) y una regla con dos marcas B y C:

a) Trazar la circunferencia con centro en O y radio OX=BC.

b) Construir en la recta OX, el punto D simétrico de X con respecto a O (D se encuentra en la circunferencia).

c) Ajustar la regla (figura 2), colocando B en la semirrecta OD, C en la circunferencia, de modo que la recta pase por el punto A.

Notar que esta construcción no es posible de realizar con regla sin marcas y compás. Este ajuste mecánico hace que la solución al problema sea aproximada.

Demostración.

- $BC = OC \Rightarrow \angle CBD = \angle COD \;\; y \quad \angle BCO = 180^o - 2\,\angle CBD$
- $OC = AO \Rightarrow \angle OCA = \angle OAC$

- $\angle OCA = 2\ \angle CBD$
- $\angle CBD + \angle DOA + \angle OAC = \angle CBD + \angle DOA + 2\ \angle CBD = 180^\circ \Rightarrow \angle DOA = 180^\circ - 3\ \angle CBD$
- $180^\circ - \angle DOA = \angle AOX \quad \Rightarrow \quad \angle AOX = 3\ \angle CBD \quad \Rightarrow \quad \angle CBD = \frac{1}{3}\ \angle AOX$

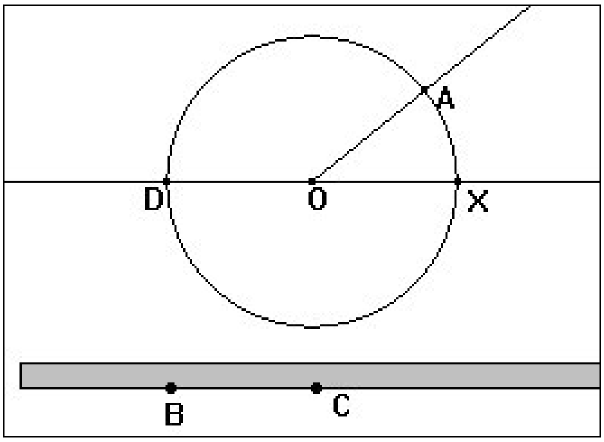

Figura 1

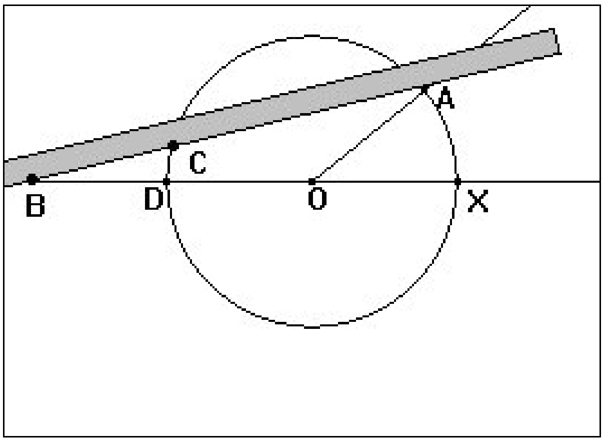

Figura 2

Una variante del método anterior, propuesto también por Arquímedes, para trisecar un ángulo usando una regla marcada y un compás, se describe a continuación.

Dado un ángulo ABC, ángulo a trisecar.

a) Construir la recta paralela a BC que pasa por A, y con el compás trazar la circunferencia con centro en A y radio AB.
b) Marcar en la regla dos puntos A’ y B’ de modo que A’B’ =AB.
c) Colocar la regla de modo que un lado esté apoyado en el punto B. Sea D el punto de intersección con la recta paralela a BC que pasa por A, y sea E el punto de intersección con la circunferencia de centro A y radio AB.
d) Mover la regla, apoyada en el punto B, de modo que la recta BD cumpla la condición AB=ED. Para este ajuste se utilizan las dos marcas A’ y B’, o sea la regla marcada.
e) Así se determina la semirrecta BD, que triseca el ángulo ABD, de modo que el ángulo DBC es igual a 1/3 del ángulo ABC.

Un método aproximado

Un método para obtener de manera aproximada las trisecciones de un ángulo cualquiera, se basa en la serie infinita convergente:

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \frac{a}{64} + \frac{a}{256} + \dots \quad = \frac{\frac{a}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{3}$$

Uso del método. Dado un ángulo de medida a. Usando regla y compás se puede construir cada sumando de la serie, ya que cada uno es de la forma $a/2^m$. El primer sumando se consigue dividiendo el ángulo en cuatro ángulos iguales. Luego se toma una de las partes, y se divide en cuatro partes iguales, y así sucesivamente. Construyendo una cantidad considerable de sumandos, y sumando estas partes, se pueden obtener buenas aproximaciones.

Esta construcción sería exacta si se pudieran realizar infinitos pasos, hecho que no está permitido en la reglas de construcciones geométricas con regla y compás.

Con instrumentos mecánicos

Los instrumentos mecánicos que permiten resolver el problema de manera aproximada son llamados *trisectores*. A continuación se presentan tres trisectores.

1. *El hacha india*. El trisector que se muestra en la figura 3 se compone de una semicircunferencia y una regla en forma de T, construido de manera que AM es igual al radio de la semicircunferencia.

Modo de uso. Dado un ángulo AOB, ángulo a trisecar. Colocar el instrumento de modo que, el borde OM pase por el vértice O del ángulo dado, el extremo A en uno de los lados del ángulo y el otro lado sea tangente en D al semicírculo.

Como los triángulos AOM, CMO y CDO son congruentes, se obtiene que las rectas OM y OC trisecan el ángulo AOB.

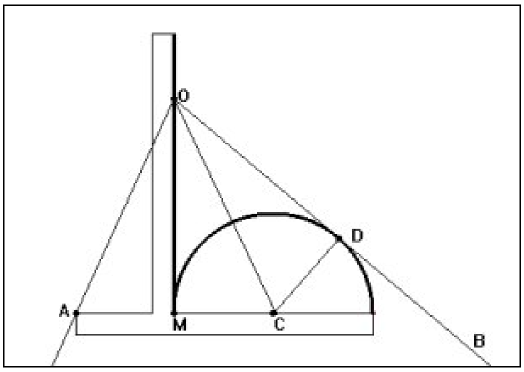

Figura 3

2. *La Escuadra del Carpintero*.

Otro de los trisectores conocidos es el llamado *Escuadra del carpintero* (ver figura 4). En este instrumento, todos los ángulos son rectos y $EF = CD = \frac{1}{2}AB = BC$.

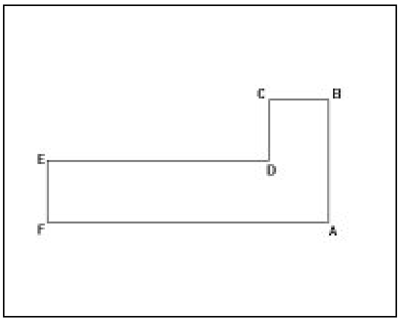

Figura 4

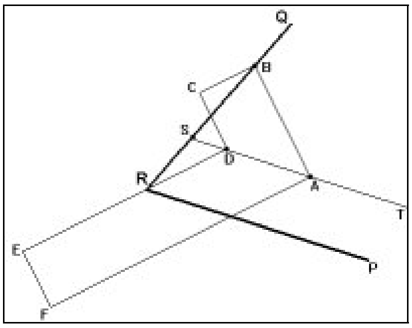

Figura 5

Modo de uso. Para trisecar a un ángulo PRQ con esta escuadra, ver figura 5, trazar una recta ST paralela al lado RP del ángulo a una distancia EF de éste (el punto S en el otro lado del ángulo. Colocar la escuadra de modo que DE contenga al punto R, A se encuentre en ST, y B se encuentre en RQ. Así, las rectas RD y RA trisecan al ángulo PRQ.

3. *Un trisector muy singular*. La figura 6 muestra un instrumento articulado bastante simple (atribuido a C. A. Laisant, 1875), para trisecar ángulos. Está compuesto por 8 reglas, que forman dos rombos congruentes. En la figura, AOEB y OFCD son rombos congruentes, OB y OC son diagonales de cada rombo. Los puntos B y C son puntos movibles.

Modo de uso. Dado un ángulo PQR, ángulo a trisecar.
Se coloca el trisector encima del ángulo haciendo coincidir el punto O con el vértice Q del ángulo, y la regla OA con el lado QR del ángulo.

Luego, se desplaza el punto móvil B (o C) hasta que la regla OD coincida con el otro lado del ángulo a trisecar. Así, se obtiene la trisección del ángulo dado.

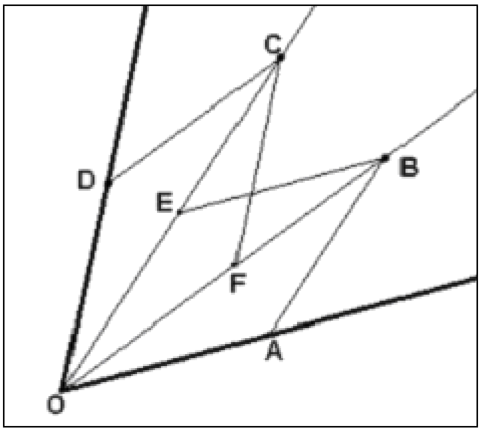

Figura 6

Mediante curvas

De los trabajos realizados por numerosos matemáticos, se descubrieron varias y novedosas curvas. Aquellas curvas que permitían resolver gráficamente el problema de la trisección de un ángulo, son llamadas *trisectrices*. Entre éstas se encuentran la Cuadratriz de Hippias, la Trisectriz de Ceva, la Trisectriz de Maclaurin, la Concoide de Nicomedes, la espiral de Arquímedes, la trisectriz de Longchamps, y muchas otras. Las trisecciones obtenidas por estas curvas son exactas, pero, estas curvas no se pueden dibujar usando sólo regla y compás. A continuación se presentan algunas trisectrices y la solución del problema usando cada curva.

Cuadratriz de Hippias

Esta curva fue descubierta por Hippias de Eleas en el año 430 AC y posteriormente fue estudiada por Dinostratos (350 AC). Una descripción de la Cuadratriz de Hippias se encuentra en el Libro IV, de la obra Synagoge escrita por Pappus en el año 340. La figura 7 muestra la construcción de esta curva, como lugar geométrico de un punto, la que se describe a continuación:

- ABCD es un cuadrado y DEB es un cuarto de circunferencia con centro en A y radio AD.
- Cuando el radio AD gira en torno a A, hasta alcanzar la posición AB, al mismo tiempo el segmento DC se desplaza paralelamente a sí mismo hasta la posición final AB. La intersección en cada instante, de las posiciones de los segmentos móviles AE y C'D'

determina un punto F de la cuadratriz DF (parte de la curva considerada por los griegos). Notar que: $\frac{BC'}{AD} = \frac{arco(EB)}{arco(DB)} = \frac{\angle EAB}{\angle DAB}$.

- Sea F el punto de intersección entre el radio que se obtiene de rotar AD y la nueva posición D'C' de DC. El lugar geométrico de F, cuando E se desplaza en el arco DEB, es la cuadratriz de Hippias.

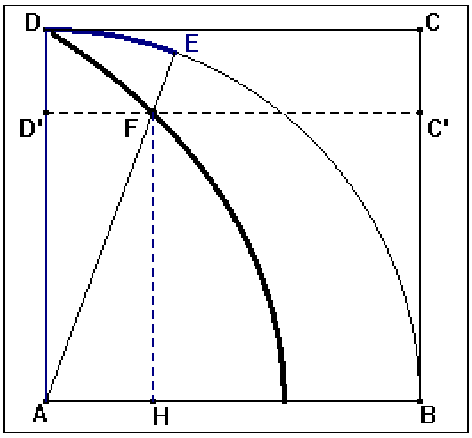

Figura 7

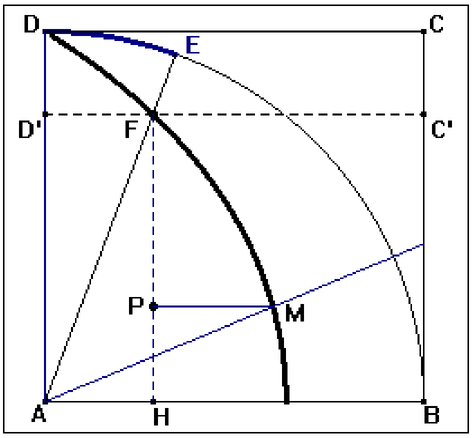

Figura 8

Considerando AB = 1, se obtiene la relación: $\angle EAB = arco(EB) = FH \cdot \frac{\pi}{2}$

Modo de uso. Dado el ángulo FAB, con F en la cuadratriz de Hippias (ver figura 8). Para dividir este ángulo en tres partes iguales:

- Construir el segmento FH paralelo a AD, con H en AB.
- Construir el punto P en FH, tal que PH=FH/3.
- Trazar por P la recta paralela a AB. Esta recta intersecta a la cuadratriz en un punto M.

La semirrecta AM divide al ángulo FAB en la razón 1/3. Así, el ángulo MAB es la tercera parte del ángulo EAB.

Nota. Esta curva permite resolver un problema más general: dividir un ángulo en cualquier número entero de partes. Para dividir el ángulo en n partes iguales, se construye P en el segmento FH tal que PH=FH/n, y se sigue una construcción análoga a la descrita anteriormente.

La ecuación cartesiana de la Cuadratriz de Hippias, descrita varios siglos después, es $x = y\cot\left(\frac{\pi\, y}{2a}\right)$. En la figura 9 se muestra la gráfica de esta curva, considerando a=1:

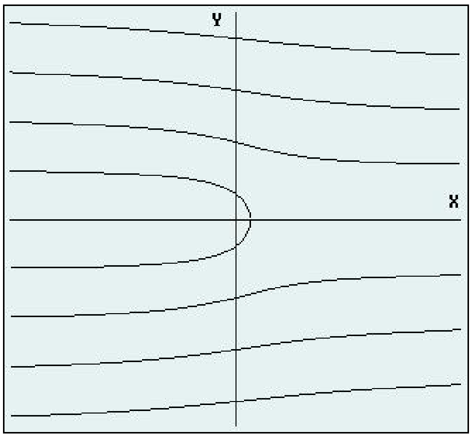

Figura 9

La trisectriz de Ceva

Curva estudiada por Giovanni Ceva, matemático italiano (1648-1734). Esta curva se puede describir como sigue.

Dados una circunferencia de centro O y radio a, y una recta Ox que pasa por O. Sea P un punto en la circunferencia. Ver figura 10.

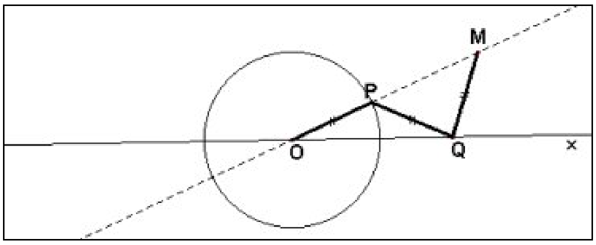

Figura 10

Se construye un punto M tal que OP=PQ=**Q**M, tal que **Q** se encuentra en la recta Ox, de manera que los puntos O, P y M estén alineados.

El lugar geométrico de los puntos M cuando P se desplaza en la circunferencia, es la curva llamada trisectriz de Ceva. Ver figura 11.

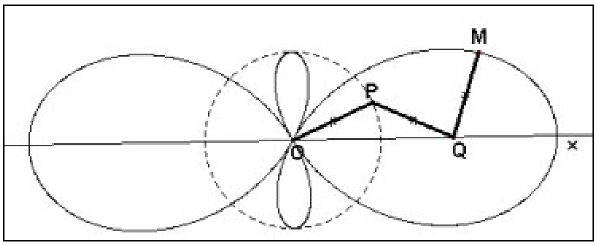

Figura 11

El ángulo x**Q**M es el triple del ángulo xOM.

La trisectriz de Maclaurin

Curva estudiada por Colin Maclaurin, matemático escocés (1698-1746), en el año 1742. Esta curva se puede describir como sigue.

Dados dos puntos O y S (ver figura 12). Se construye el punto A en OS tal que OA=$\frac{2}{3}$OS. La trisectriz de Maclaurin de vértice S y el punto doble O, es el lugar geométrico de todos los puntos M tales que OP=PA=AM, y tales que O, P y M están alineados.

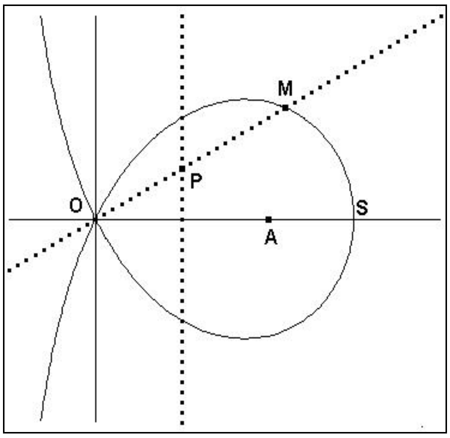

Figura 12

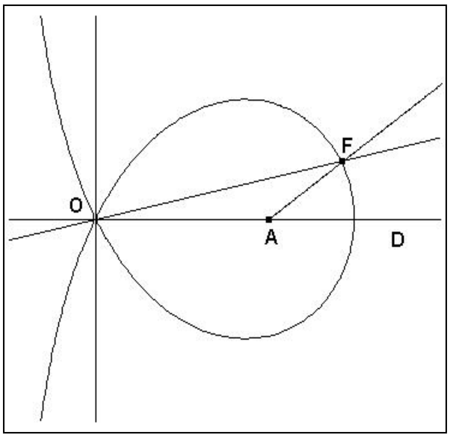

Figura 13

Modo de uso. Dado el ángulo DAF, ángulo a trisecar. Colocar el ángulo de modo que su vértice coincida con el punto A, uno de sus lados en la recta OD. Sea F un punto de intersección del otro lado del ángulo con la trisectriz (ver figura 13). Trazar la recta OF. El ángulo FOD mide la tercera parte del ángulo dado DAF.

La ecuación cartesiana de la trisectriz de Maclaurin es: $x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$.

Sobre la imposibilidad de resolver con regla y compás el problema de la trisección de un ángulo cualquiera.

Sólo en el siglo XIX, se logró demostrar que los problemas de la trisección de un ángulo y de la duplicación del cubo, no podían ser resueltos usando únicamente la regla y el compás. El desarrollo de Álgebra logrado en ese siglo, específicamente la Teoría de Galois, tuvieron importantes implicaciones en situaciones geométricas. Basándose en resultados sobre ecuaciones algebraicas, el matemático francés Wantzel (1814-1848), demostró que las construcciones en los problemas de la duplicación del cubo y en la trisección del ángulo eran imposibles, al establecer la equivalencia entre un problema de construcciones geométricas y un problema algebraico.

El problema geométrico de determinar una incógnita x mediante construcciones con regla y compás, equivale al problema algebraico de resolver ecuaciones que puedan reducirse al producto de ecuaciones de primer y segundo grado. Si el problema conduce a una ecuación de grado superior a 2 no reducible en los racionales, el problema no es resoluble con regla y compás.

A continuación se presenta el teorema que establece la imposibilidad de resolver el problema para un ángulo cualquiera, con los instrumentos geométricos.

Teorema.
La trisección de un ángulo con regla y compás no es posible para cualquier ángulo.

Demostración:
Dado un ángulo $\alpha = \angle AOB$. El problema consiste en construir geométricamente un punto P tal que el $\angle POB = \alpha/3$.

El problema de construir $\alpha/3$ (medido en radianes), equivale a construir $\cos(\alpha/3)$.

- Considerar la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha) = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$$

- Reemplazando $\cos(\alpha) = c$ y $\cos(\alpha/3) = x$, se obtiene la ecuación:

$$4\,x^3 - 3x + c = 0 \qquad (*)$$

Para c=1/2, el ángulo $\alpha = \pi/3$ o $\alpha = 60^o$. La ecuación (*) queda:

$$8\,x^3 - 6x + 1 = 0$$

Aplicando el teorema sobre las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, se obtiene que las únicas posibles raíces racionales de esta ecuación podrían ser:

$$\pm 1, \quad \pm 1/2, \quad \pm 1/4, \quad \pm 1/8$$

Como ninguna de ellas es raíz de la ecuación, es imposible trisecar el ángulo $\alpha = 60^o$ mediante construcciones geométricas. En otras palabras, un ángulo de 20^o no puede ser construido con regla y compás.

Observación.
Por supuesto que existen ángulos que se pueden trisecar, usando la regla y el compás. Por ejemplo, para c=0, el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ o $\alpha = 90^o$. En este caso, la ecuación (*) queda:

$$4\,x^3 - 3x = 0$$

el problema es posible ya que, la expresión de la izquierda es reducible en el cuerpo de los racionales:

$$x(4x^2 - 3) = 0$$

Luego, es posible trisecar el ángulo $\alpha = 90^o$. Otros ángulos que se pueden trisecar usando regla (sin marcas) y compás son por ejemplo: 45º y 72º.

Comentarios finales
En este trabajo se ha abordado de manera muy resumida uno de los clásicos problemas de construcciones geométricas, el problema de la trisección de un ángulo. El hecho de incorporar en la enseñanza de la geometría problemas que han contribuido a la evolución de esta ciencia ayuda a una mejor comprensión del desarrollo de esta disciplina a través del tiempo.

Bibliografía

[1] Alsina, C. Trillas, E. *Lecciones de Álgebra y Geometría.* Editorial Gustavo Gill, S.A. Rosellón, Barcelona. 1984.

[2] González, M. *Complementos de Geometría.* Minerva Books, Ltda.. 1965.

[3] Herstein, I. N. *Álgebra moderna*. Editorial Trillas. 1970.

[4] Reinhart, F., Soeder, H. *Atlas des mathématiques*. La Pochothèque. Le livre de poche. 1997.

[5] Revista Matemáticas, Educación e Internet. http://www.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Triseccion/index.html

[6] Trisección de ángulos. http://www-etsi2.ugr.es/profesores/jmaroza/anecdotario/anecdotario-t.htm