Sobre la ecuación cúbica

Juana Contreras S.[♣]
Claudio del Pino O.[♦]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

La matemática es una travesía al interior de una extraña jungla donde los exploradores se pierden con frecuencia.
W.S. Anglin

1) Antecedentes históricos:

En la comunidad matemática, se reconoce a los Babilonios (alrededor del siglo IV A.C.) como los primeros en resolver la ecuación cuadrática, calcular raíces cúbicas y resolver algunas ecuaciones cúbicas, aunque ellos no tenían la actual noción de ecuación. El método que usaban era esencialmente el de *completación de cuadrados*. Sin embargo todos los problemas de los Babilonios tenían respuestas que eran cantidades positivas (más precisamente, sin signo), puesto que usualmente correspondían a longitudes.

Euclides

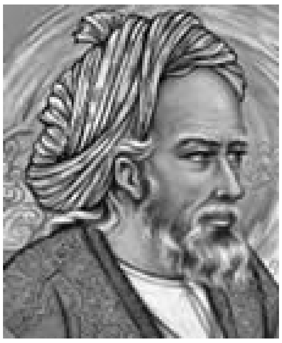
Alrededor del siglo 300 A.C., Euclides desarrolló una *aproximación* geométrica para resolver ecuaciones cúbicas, en la cual su intención era encontrar una longitud, que en nuestra notación correspondía a encontrar una raíz de la ecuación. Posteriormente los matemáticos usaron este método para resolver ecuaciones cuadráticas. Euclides no tenía la noción de ecuación.

Los matemáticos Hindúes adoptaron los métodos babilónicos. Así es como Brahmagupta (India; 598-665 D. de C.) dio un método, prácticamente moderno para resolver ecuaciones cuadráticas, que admitía cantidades negativas y asignaba letras a las diferentes incógnitas que usaba.

♣ e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
♦ e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

Los árabes por su parte, no conocieron los avances de los Hindúes, por lo que ellos no usaban cantidades negativas ni abreviaciones para sus incógnitas. Sin embargo, al'Khwarizmi (Bagdad; 790-840 D. de C.) dio una clasificación de diferentes tipos de cuadráticas. Este matemático entregó una regla para resolver cada uno de sus tipos de ecuaciones, esencialmente la familiar fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas.

Aproximadamente en el año 1100, finalmente el matemático judío-español Savasorna (1070-1136), en su libro *Tratado sobre las medidas y los cálculos* dio la solución completa de la ecuación cuadrática.



Kayyam

En el año 1074 el matemático y poeta persa Omar Kayyam (1048-1131) publica en su libro *Álgebra*, la *resolución geométrica* de diversos♣ tipos de ecuaciones cúbicas. Alguna de ellas son:

$$x^3 = c,$$

$$x^3 + bx = c,$$

$$x^3 + c = bx,$$

$$x^3 + ax^2 = c, \text{ etc.}$$

Para ilustrar la estrategia seguida por Omar Kayyam para resolver ecuaciones cúbicas geométricamente, se comenta (usando lenguaje moderno) el método usado para resolver la ecuación $x^3 + bx = c$.

► Construyamos en un plano coordenado la parábola

$$x^2 = \sqrt{b} \cdot y \qquad (7)$$

y la circunferencia que pase por el origen, centro en el eje X y diámetro $h = \frac{c}{b}$. Sea $P = (x, y)$ el punto ubicado en el primer cuadrante donde ambas curvas se intersectan (ver figura 1). En la figura 1, se tiene que $\Delta OPR \approx \Delta PQR$. Luego, $\frac{y}{x} = \frac{h - x}{y}$. De donde,

$$y^2 = xh - x^2 \qquad (8)$$

♣ Kayyam considera varios tipos, pues él solamente trabajaba con números (magnitudes) positivos.

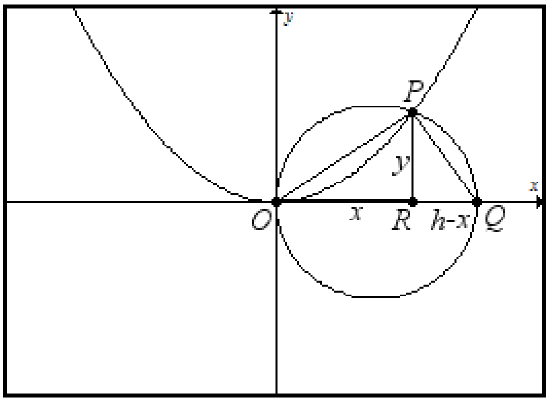


Figura 1

Ahora bien, elevando al cuadrado la relación (7) y sustituyendo en ella la relación (8), se obtiene:

$$x^3 + bx = c.$$

Por lo tanto, la longitud del segmento *OR* es una solución real de la ecuación cúbica en estudio.◀

Tartaglia

Con respecto a la solución algebraica de la ecuación cúbica general, en ella trabajaron varios matemáticos. Pero, es al matemático italiano Nicolo Fontana de Brescia, más conocido como Tartaglia (Italiano; 1499-1557) a quien se le atribuye tal logro en el año 1526, aunque tal solución fue publicada en año 1545 por el matemático Cardano (Italiano; 1501-1576) en su libro *Ars Magna*. En este mismo libro se incorpora la resolución de ecuaciones de grado 4, desarrollada por Ludovico de Ferrari (Italia; 1522-1565), alumno de Cardano.

Posterior al logro de Tartaglia, varios matemáticos desarrollaron métodos algebraicos diferentes para resolver una euación cúbica: Francois Viete (Francés; 1540-1603), Tomas Harriot (Inglés; 1560-1621), etc.

Galois

Las soluciones encontradas para las ecuaciones de grado 2, 3 y 4, tenían la particularidad que ellas eran expresadas en término de expresiones algebraicas, es decir, expresiones que solo involucraban las cuatro operaciones básicas y raíces.

Durante mucho tiempo, más de 300 años, los matemáticos intentaron, sin éxito, encontrar soluciones análogas para las ecuaciones de grado 5. Finalmente, el año 1830, dos jóvenes matemáticos, Evaristo Galois (Francés; 1811-1832) y Niels Abel (Noruega; 1802-1829), probaron independiente uno del otro, que no es posible resolver ecuaciones de grado 5 o mayor usando expresiones algebraicas.

2) Resolución algebraica de la ecuación cúbica general

En este artículo se trabaja la *ecuación cúbica general* con coeficientes reales:

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \text{, con } a_1 \neq 0 . \qquad (1)$$

Algunos resultados generales sobre (1) son:

- Tiene tres raíces (contando multiplicidades).
- Al menos una de las raíces es real.

Es claro que la ecuación (1) es equivalente a una del tipo:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (2) se puede transformar, por medio de un cambio de variable del tipo $x = y + r$, (para algún *r*) en una *ecuación cúbica reducida* (sin término cuadrático) del tipo:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (3)$$

En efecto:

Reemplazando $x = y + r$ en la ecuación (2), se tiene:

$$(y+r)^3 + b(y+r)^2 + c(y+r) + d = 0$$

Desarrollando y agrupando:

$$y^3 + (3r+b)y^2 + (3r^2 + 2rb + c)y + (r^3 + r^2b + rc + d) = 0$$

Considerar $r = -b/3$.

Así, el cambio de variable $x = y - b/3$, transforma la ecuación (2) en una del tipo (3).

donde $p = c - \frac{b^2}{3}$ y $q = \frac{2b^3}{27} + \frac{bc}{3} + d$.

Por lo tanto, la resolución de la ecuación cúbica general (1) se reduce a resolver la *ecuación reducida* (3).

A continuación se expone el método con el cual Cardano resolvió la *ecuación cúbica reducida* (3).

► La idea clave del procedimiento es suponer que la solución buscada se puede descomponer de la forma

$$y = A + B$$

elevando al cubo, se obtiene:

$$y^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

relación que se puede escribir como:

$$y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0$$

Comparando los coeficientes de esta ecuación con los coeficientes de la ecuación (3), se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3AB &= -p \\ A^3 + B^3 &= -q \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

De donde

$$\left.\begin{aligned} A^3B^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ A^3 + B^3 &= -q \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Luego, A^3 y B^3 son las raíces de la ecuación cuadrática[1], llamada *resolvente* de la ecuación (3):

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

Por lo tanto:

[1] Recordar que: *x'* y *x''* son las raíces de $x^2 + bx + c = 0$ siempre y cuando $x' + x'' = -b$ y $x'x'' = c$

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = e$$

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = f$$

Extrayendo raíz cúbica se obtienen 3 valores para *A* y 3 valores para *B*, y recordando que *y=A+B*, se obtienen 9 pares de soluciones de (5), pero no todos ellos satisfacen (4) debido a que la elevación al cubo (al pasar de (4) a (5)) ha introducido *soluciones extrañas*. Por lo tanto, de los 9 pares de valores soluciones, sólo se deben elegir los que cumplen la condición $AB = -\frac{p}{3}$. Con esta restricción, se tiene que las 3 raíces de la ecuación cúbica reducida (3) vienen expresadas por la formula general atribuida a Scipione del Fiore:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$ ◀

A continuación se estudian las raíces de (3) en función de los *signos* de $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.
Δ recibe el nombre de *discriminante* de la ecuación cúbica reducida (3).

Caso 1: $\Delta > 0$.
En este caso *e* y *f* son reales. Sean α y β las raíces cúbicas reales de *e* y *f* respectivamente. Luego, los valores de *A* son: α, $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ y los valores de *B* son: $\beta, \beta\omega, \beta\omega^2$, donde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ (una raíz cúbica de la unidad). Recordando que $y = A + B$ y que $AB = -\frac{p}{3}$ debe ser real, se obtiene que las tres soluciones de (3) son:

$$y_1 = \alpha + \beta$$
$$y_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2$$
$$y_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega$$

Caso 2: $\Delta = 0$.
En este caso $A = B$ y las 3 raíces de (3) son reales y vienen dadas por:

$$y_1 = 2\alpha$$
$$y_2 = y_3 = \alpha(\omega + \omega^2) = -\alpha$$

Caso 3: $\Delta < 0$.
En este caso[2] e y f son complejos conjugados

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}} = r(\cos t \pm i\sin t)$$

de donde

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \quad \text{y} \quad \cos t = -\frac{q}{2r}$$

Luego, los valores de A y B son, respectivamente:

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)+i\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right),\quad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)\right),\quad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)\right)$$

y

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)-i\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right),\quad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)\right),\quad \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)\right)$$

Teniendo en cuenta la misma observación del caso 1, se tiene que:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\left(\frac{t}{3}\right)$$
$$y_2 = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)$$
$$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)$$

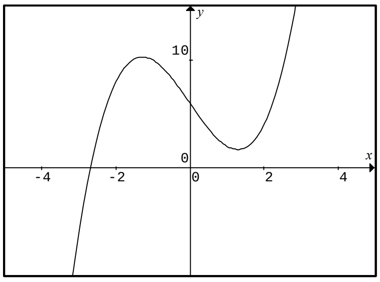
En resumen, la ecuación cúbica reducida (3):

- **Caso 1**: Si $\Delta > 0$, tiene 1 raíz real y dos complejas (conjugadas).
- **Caso 2**: Si $\Delta = 0$, tiene 3 raíces reales (2 o 3 iguales).
- **Caso 3**: Si $\Delta < 0$, tiene 3 raíces reales y distintas.

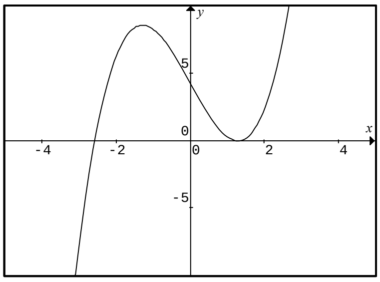
Finalmente, una vez encontradas las raíces de la ecuación (3), las ecuaciones de (2) se obtienen recordando que $x = y - \frac{p}{3}$.

[2] Este caso recibe el nombre de *irreducible*, pués el cálculo de las tres raíces se obtiene trabajando trigonométricamente. Como es de suponer, este caso no pudo ser abordado por los descubridores del método para resolver la cúbica, pués en ese tiempo aún no se conocían los números complejos ni las funciones trigonométricas.

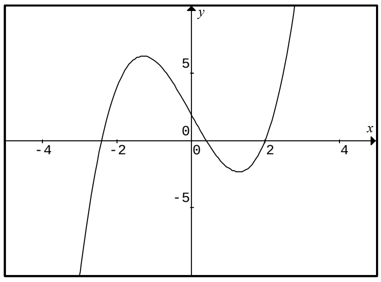
La visualización gráfica de la función polinomial $x^3 + px + q$, en términos del discriminante Δ es:



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0$ (*)

Paso 1: Hacer cambio de variable: $x = y - \frac{b}{3} = y - \left(\frac{-9}{3}\right) = y + 3$

Se obtiene la ecuación cúbica reducida: $y^3 - 36y - 96 = 0$ (**)

Luego, $p = -36$ y $q = -96$

Paso 2: Calcular el discriminante de la ecuación (**):

$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 576$. Luego, estamos en caso 1: una raíz real y dos complejas conjugadas.

Paso 3: Cálculo de las raíces de la ecuación cúbica reducida (**).

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{72} = 2\sqrt[3]{9}\ ;\ \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

Luego, las raíces de (**) son:

$y_1 = \alpha + \beta = 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} \approx$ **7.044666786**

$y_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2 = 2\sqrt[3]{9}\omega + 2\sqrt[3]{3}\omega^2 \approx$ **-3.522333393 + 1.104761332·i**

$y_3 = \alpha\omega + \beta\omega^2 = 2\sqrt[3]{9}\omega^2 + 2\sqrt[3]{3}\omega \approx$ **-3.522333393 - 1.104761332·i**

Paso 4: Calculo de las raíces de (*).

$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{y_1} + 3 = 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + \mathbf{3} \approx \mathbf{7.044666786} + \mathbf{3} = \mathbf{10.044666786}$

$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{y_2} + 3 = 2\sqrt[3]{9}\omega + 2\sqrt[3]{3}\omega^2 + \mathbf{3} \approx$ **-0.522333393 + 1.104761332·i**

$\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{y_3} + 3 = 2\sqrt[3]{9}\omega^2 + 2\sqrt[3]{3}\omega + \mathbf{3} \approx$ **-0.522333393 - 1.104761332·i**

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x^3+10x^2+\frac{91}{3}x+\frac{703}{27}=0$ (•)

Paso 1: Hacer cambio de variable: $x=y-\frac{b}{3}=y-\frac{10}{3}$

Se obtiene la ecuación cúbica reducida: $y^3-3y-1=0$ (••)

Luego, $p=-3$ y $q=-1$

Paso 2: Calcular el discriminante de la ecuación (••):

$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{3}{4}$. Luego, estamos en caso 3: tres raíces reales y distintas.

Paso 3: Cálculo de las raíces de la ecuación cúbica reducida (••).

$r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\sqrt{1}=1,\quad \cos t=-\frac{q}{2r}=\frac{1}{2}$ de donde $t=\frac{\pi}{3}$

Luego, las raíces de (••) son:

$$y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\approx \mathbf{1.879385241}$$

$$y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t+2\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)\approx \mathbf{-1.532088886}$$

$$y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)\approx \mathbf{-0.3472963553}$$

Paso 4: Calculo de las raíces de (*).

$$\boldsymbol{x_1=y_1}-\frac{10}{3}=2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{9}\right)-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}-\approx \mathbf{-1.453948091}$$

$$\boldsymbol{x_2=y_2}-\frac{10}{3}=2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\approx \mathbf{-4.865422219}$$

$$\boldsymbol{x_3=y_3}-\frac{10}{3}=2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\approx \mathbf{-3.680629688}$$

Resolución de la ecuación cúbica reducida por medio del cambio de variable de Harriot.

Tal como se comentó, luego de ser difundido el método de Tartaglia para resolver ecuaciones cúbicas, diferentes matemáticos desarrollaron métodos alternativos con el mismo fin. Uno de ellos fue el matemático Harriot, cuyo método se comenta a continuación:

►Retomando la ecuación (3): $y^3 + px + q = 0$

Se incorpora en (3) el cambio de Harriot:

$$x = z + \frac{k}{z}, \tag{6}$$

donde k es una constante a determinar, se obtiene:

$$\left(z + \frac{k}{z}\right)^3 + p\left(z + \frac{k}{z}\right) + q = 0$$

Desarrollando y luego multiplicando por z^3 se tiene:

$$z^6 + (3k + p)z^4 + qz^3 + (3k + p)kz^2 + k^3 = 0$$

Eligiendo k de modo que $3k + p = 0$, es decir $k = -\frac{p}{3}$, se tiene que la ecuación precedente se transforma en:

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Ecuación cuadrática en z^3. Luego, se puede encontrar z y luego usando (6) se encuentran las raíces de (3). ◄

Anexo 1:
De las disputas asociadas a la resolución de la ecuación cúbica.

Scipione del Ferro, profesor de la Universidad de Bolonia, descubrió, hacia 1505, la fórmula que aún hoy se emplea para solucionar una ecuación de tercer grado, pero no comunicó a nadie su descubrimiento, sin duda para usarlo en las disputas públicas y así ganar fama. Sólo en su lecho de muerte informa de su fórmula a su yerno Annibale della Nave y a su alumno Antonio María del Fiore.

Tentado por la *fórmula mágica*, Del Fiore reta a Tartaglia, reputado matemático veneciano, a una disputa pública en la que cada uno debe solucionar los problemas que le propone el otro. Del Fiore, conocedor del valor de su fórmula, propone a Tartaglia problemas que sólo se pueden resolver con una ecuación de tercer grado. Tartaglia la encuentra el 12 de febrero de 1535, y derrota públicamente a Del Fiore.

Cardano, famosísimo matemático y doctor del norte de Italia, al saber que Tartaglia ha descubierto la fórmula, le pide que se la cuente en un encuentro, el 25 de marzo de 1539. Cardano, en un solemne juramento, se compromete a no hacer públicos sus descubrimientos, con lo que Tartaglia accede, comunicándole su método operativo en un poema. Estaba presente también el joven de 17 años, Ludovico Ferrari, ayudante de Cardano, nuestro sexto protagonista.

Tartaglia, muy ofendido, escribe en 1546 *Questi et inmventioni diverse*, en la que relata su versión de los hechos y reproduce su correspondencia con Cardano, dando comienzo un tenaz intercambio de cartas y carteles públicos entre Tartaglia y ¡Ferrari!, que salió en defensa de su maestro Cardano, quien se mantuvo al margen de esta polémica. La historia termina el 10 de agosto de 1548 como comenzó: en una disputa pública en Milán entre un tartamudo y cansado Tartaglia y Ferrari, un joven elocuente y brillante matemático que además *jugaba en casa*. La disputa no acabó. Tartaglia abandonó humillado, perdiendo bastante de su fama. Cardano no asistió.

Cardano y Ferrari estudiaron la fórmula pero la mantuvieron en secreto. En 1542, casi en actitud detectivesca, deciden visitar a Annibale della Nave y, revisando los papeles de Del Ferro, encuentran ¡la fórmula que Tartaglia había descubierto! Cardano podría publicar en su 'Ars Magna' la importantísima fórmula sin faltar al juramento hecho a Tartaglia. Así lo hizo, escribiendo

“*[...] mi amigo Niccolo Tartaglia resolvió el mismo caso [...]*
y movido por mis ruegos, me la confió a mí.”

En este libro también se entregaban métodos para resolver ecuaciones de grado cuatro, quedando pendiente solamente algunos detalles técnicos (esencialmente raíces cuadradas de números negativos).

Bibliografía

[1] Brain, L., *Poesía, álgebra y espionaje*. www.lolitabrain.com

[2] Espinoza, E., Gonzalo. *Algebra*, Editorial Servicios gráficos J.J., 2003.

[3] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C., *Análisis Matemático*, Volumen 1, Editorial Kapeluz, 1963.