Sobre el problema de la cuadratura del círculo

Juana Contreras S.[4]
Claudio del Pino O.[5]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

El más famoso de los clásicos problemas de geometría de la época de los griegos, es el *Problema de la Cuadratura del Círculo*, cuyo origen se encuentra en un documento transcrito en el papiro de Rhind (1650 AC) por el escriba egipcio Ahmes, que trata sobre el cálculo del número π. La formulación del problema geométrico, que conocemos actualmente, se lo debemos a los geómetras griegos, cuyo enunciado es el siguiente:

Dado un círculo de radio r, construir utilizando únicamente regla (*sin marcas*) *y compás, el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área del círculo dado.*

Los antiguos griegos, aunque comprendían muy bien el problema geométrico y al no encontrar solución al problema, no se restringieron sólo a la regla y el compás, sino que, intentaron resolverlo desarrollando una gran variedad de métodos alternativos: usando curvas especialmente creadas con ese propósito, y diversas construcciones basadas en métodos mecánicos.

Por muchos siglos este problema fascinó y despertó el interés de grandes matemáticos y de muchos aficionados a la matemática. Una solución a este problema requiere de la construcción del número π.

Cuadraturas

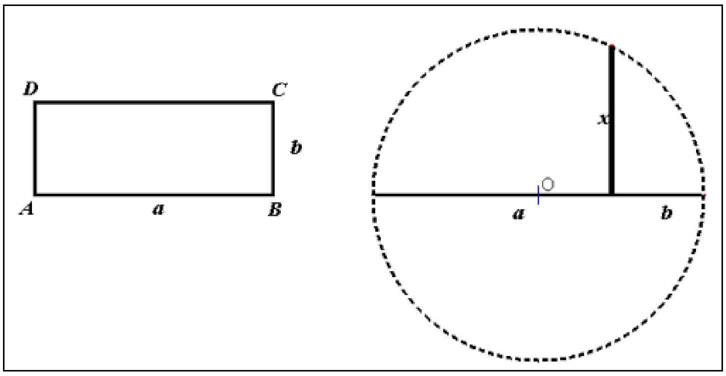
El problema general de *cuadraturas*, tratado de manera especial en los Elementos de Euclides, consiste en construir con regla y compás un cuadrado de área igual a la de una figura dada. En esta máxima obra de la geometría, se presentan las soluciones a problemas de cuadratura de polígonos en general, y de la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates, presentadas a continuación.

1) Dado un rectángulo ABCD, construir el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área del rectángulo dado.

[4] e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[5] e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

El problema consiste en determinar una longitud x tal que

$$x^2 = a\,b$$

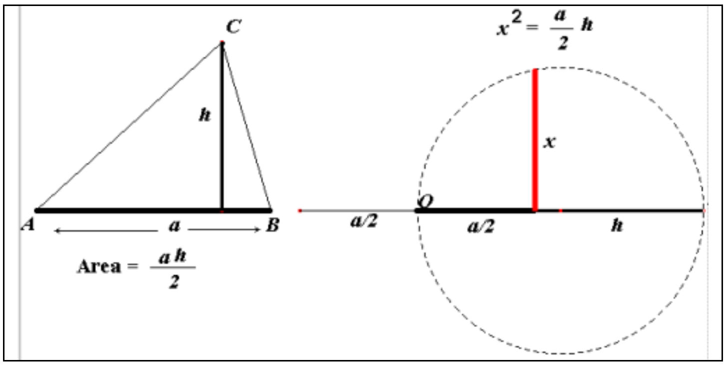


2) Dado un triángulo ABC, construir el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área del triángulo dado.

El problema consiste en determinar una longitud x tal que:

$$x^2 = \frac{a}{2}\,h$$

donde h es la altura del triángulo, relativa al lado a.



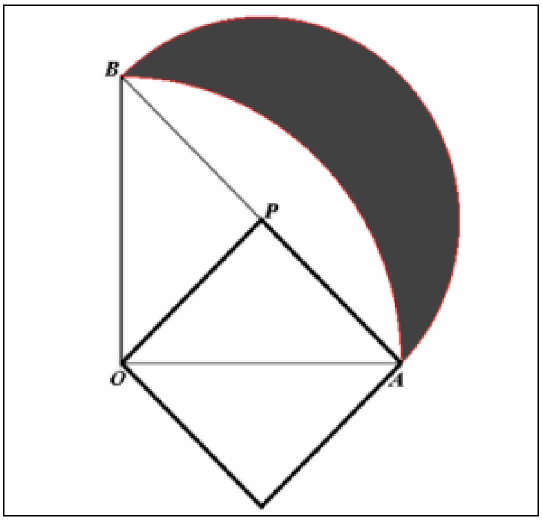
3) Dada una lúnula, construir el lado de un cuadrado cuya área sea igual al área de la lúnula.

Una lúnula es la región comprendida entre el arco de centro O y radio $OA=OB$, donde OA es perpendicular a OB, y el arco de centro P y radio $AP=PB$.

Area lúnula $= \dfrac{\pi\,AP^2}{2} - \left(\dfrac{\pi\,OA^2}{4} - \dfrac{OA^2}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\,OA^2$

$= AP^2$

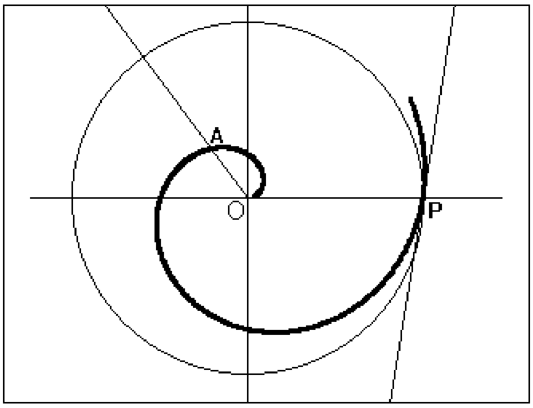


La posibilidad de cuadrar polígonos de cualquier número de lados, y de regiones limitadas por círculos, alentaba a los geómetras griegos en la posibilidad de cuadrar un círculo. Un hecho notable es que los griegos no produjeron demostraciones falsas sobre la cuadratura del círculo, e intuían que el problema no podía ser resuelto con regla y compás. No ocurriendo esto en siglos posteriores. Es así que en el siglo XVIII, tantas personas creían haber logrado resolver el problema, que la Academia Francesa de Ciencias acordó no examinar más *soluciones* del famoso problema.

Soluciones aproximadas basadas en curvas especiales

a) *Espiral de Arquímedes***.**

Sea L una recta en el plano que gira en torno a un punto fijo O hasta volver a su posición inicial, y así sucesivamente; y si al mismo tiempo, un punto A, punto móvil en *L*, se desplaza uniformemente a lo largo de la recta comenzando en el punto fijo. El punto *A* describe una espiral en el plano.

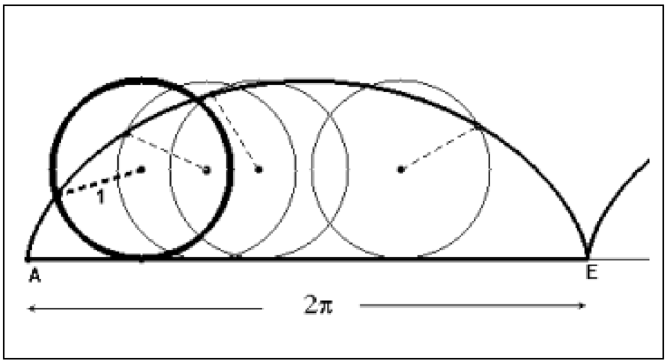


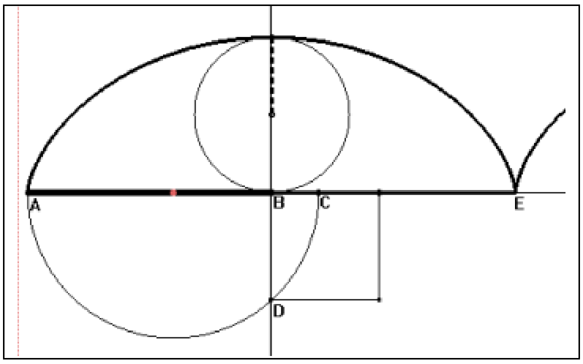
Para cuadrar el círculo, Arquímedes dio la siguiente construcción:

Sea P el punto de la espiral cuando la recta L completa la primera vuelta. Sea T el punto de intersección entre la recta tangente a la espiral en P y la recta perpendicular a OP que pasa por O. Arquímedes probó que el segmento OT corresponde al perímetro de la circunferencia de radio OP, y que el área del círculo de radio OP es igual al área del triángulo rectángulo OPT.

b) *Mediante la cicloide.*

Galileo descubrió que mediante la *cicloide* se puede construir una superficie equivalente a un círculo dado. La *cicloide* es la curva que describe un punto fijo en una circunferencia que gira, sin resbalar, sobre una línea recta fija. Suponiendo la circunferencia de radio 1, la medida del segmento que une la posición de dos puntos de contacto consecutivos del punto fijo con la recta fija, es 2π. Luego, *rodando* la circunferencia de radio 1, medio giro, se obtiene un segmento (denotado por *AB*, en la figura de la derecha) de longitud π.





Luego, construyendo la semicircunferencia de diámetro $AC = AB + 1$, y trazando por B la recta perpendicular a la recta fija, se obtiene el punto de intersección *D*. La relación $AB \cdot BC = BD^2$ permite resolver el problema ya que la longitud de AB es π, y la de BC es 1.

Aproximaciones numéricas del número π

El número π es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. El problema de cuadrar un círculo de radio r, equivale a construir con regla y compás una medida x tal que $x^2 = \pi r^2$. A continuación se presentan algunas aproximaciones numéricas obtenidas para el número π.

Aproximaciones basadas en construcciones geométricas

a) *Formulación de Arquímides*. El primer cálculo del número π con justificación teórica se atribuye a Arquímedes de Siracusa (287-212 aC.), demostrando que $223/71 < \pi < 22/7$.

Utilizó un algoritmo recursivo partiendo de dos hexágonos, uno circunscrito y otro inscrito en una circunferencia de radio 1. Luego construyó polígonos regulares, duplicando el número de lados, es decir, polígonos de $6 \cdot 2^n$ lados.

En notación moderna, para los polígonos **circunscritos** generó las sucesiones u_n=(1/2) longitud del lado del polígono regular de n lados, y v_n=distancia del centro del circulo a un vértice del polígono. Así:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n} \quad \text{y} \quad v_{n+1} = \sqrt{1+u_{n+1}{}^2}\,, \text{ siendo } u_0 = \frac{\sqrt{3}}{3},\ v_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Obteniendo las aproximaciones de π: $\pi_n = 6 \cdot 2^n u_n$.

Arquímedes usó para sus cálculos una buena aproximación de $\sqrt{3} \approx \dfrac{265}{153}$, obteniendo para *n*=4, la cota superior 22/7. Realizando un trabajo similar con los polígonos inscritos, obtuvo la cota inferior 223/71 para π.

Posteriormente, François Viète (1540-1603) obtuvo el perímetro de un polígono de n=393216 lados, usando el algoritmo de Arquímedes, y una aproximación de $\pi \approx 3.141592653(65...)$ con nueve decimales.

Actualmente, usando funciones trigonométricas, las sucesiones de perímetros de los polígonos circunscritos e inscritos en un círculo de radio 1, las sucesiones descritas por Arquímedes se pueden describir como:

$$P_n = 2 \cdot N \cdot \tan\left(\frac{\pi}{N}\right), \qquad p_n = 2 \cdot N \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right), \text{ donde } N = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

b) *Formulación de Pfaff.* En 1800, Johann Pfaff (1765-1825) dio una formulación moderna de la iteración geométrica anterior, definiendo las dos sucesiones a_n y b_n correspondientes a los perímetros de los polígonos regulares circunscritos e inscritos en un círculo de radio 1, respectivamente, con $6 \cdot 2^n$ lados:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \ \text{ y } \ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\ , \text{ donde } \ a_0 = 2\sqrt{3}\ ,\ b_0 = 3$$

aproximaciones que se pueden resumir en una tabla:

n	$6 \cdot 2^n$	a_n	b_n
0	6	$2\sqrt{3} \approx 3.464101615$	3
1	12	$12(2-\sqrt{3}) \approx 3.215390309$	$6(\sqrt{2-\sqrt{3}}) \approx 3.105828541$
2	24	$24(2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}) \approx 3.159659941$	$12(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}) \approx 3.132628612$
3	48	3.146086213	3.139350201
4	96	3.142714597	3.141031948
5	192	3.141873047	3.141452469
...	...		

La sucesión b_n es creciente y la sucesión a_n es decreciente y $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in IN$. Y, cuando n crece considerablemente, ambas sucesiones, tienden al límite común π.

Aproximaciones basadas en métodos algebraicos

Hasta el siglo XVII, aproximaciones del número π sólo habían sido obtenidas por medio de procedimientos geométricos. Con la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, se abandonaron en parte los métodos de los griegos y se empezaron a utilizar métodos algebraicos: series infinitas convergentes, productos infinitos y fracciones continuas. A continuación se presentan algunas contribuciones en este sentido.

a) Uno de los precursores fue el matemático francés Viète a quien se le atribuye la primera fórmula de este tipo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

producto infinito convergente que proviene de la relación de recurrencia que existe entre las áreas de polígonos regulares de 2^n y 2^{n+1} lados.

b) El matemático inglés John Wallis (1616-1703) contribuyó con uno de los más famosos productos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Este matemático contribuyó también al desarrollo de la teoría de las fracciones continuas, obteniendo:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}$$

dando el nombre de *reducidas* sucesivas a las fracciones:

$$r_0 = 3,\; r_1 = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3.\underline{14}2857142\ldots,\; r_1 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} \approx 3.\underline{1415}09433\ldots,\; \ldots$$

c) La serie infinita atribuida a Leibniz (1646-1716):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (*)$$

Esta serie converge muy lentamente, ya que por ejemplo, se requieren 1000 sumandos para obtener cuatro decimales exactos de π.

d) Gregory (1638-1675) demostró un resultado más general:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad (-1 \le x \le 1) \qquad (**)$$

Notar que, sustituyendo x=1 en esta serie, se obtiene (*). Usando el hecho que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ y (**) consiguió la serie: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 3} + \ldots\right)$ que converge mucho más rápido, ya que con 9 sumandos se obtiene una aproximación de π con cuatro decimales exactos.

e) En 1775, Euler calculó π con 20 decimales, por medio de la fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\frac{1}{7} + 8 \arctan\frac{3}{79}$$

utilizando la serie: $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 - \ldots\right)$. A Euler se debe la notación π para la razón entre la circunferencia y su diámetro.

La dedicación y el esfuerzo de muchos matemáticos por calcular π, se puede explicar, por una parte, esperaban probar la naturaleza trascendente del número π mediante series infinitas, y por otra, estaban admirados de que una razón geométrica podía obtenerse de tantas relaciones aritméticas que tenían poca o ninguna relación con la geometría.

Sobre la imposibilidad de construir el número π con regla y compás.

El desarrollo de Álgebra logrado en el siglo XIX, específicamente de la Teoría de Galois, proporcionó importantes resultados que permitieron resolver problemas del ámbito de la geometría. Un paso decisivo en la historia de los tres problemas clásicos de construcción de la geometría, fue dado por Karl Gauss (1777-1855), que dio una interpretación algebraica a los problemas de construcción con regla y compás. Es así que, basándose en resultados algebraicos, el matemático francés Wantzel (1814-1848), demostró la imposibilidad de resolver el problema de la duplicación del cubo y el de la trisección del ángulo, permaneciendo sin resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Respecto del último problema, se estableció que la dificultad para resolver el problema de la cuadratura del círculo radicaba en determinar la naturaleza del número π. El primer problema que había que resolver era, determinar si el número π era algebraico. Luego, si resultaba algebraico, había que determinar si pertenecía a la clase de números construibles con regla y compás, o sea, si se podía obtener de números enteros o racionales usando únicamente operaciones de suma, resta, multiplicación, división o raíz cuadrada.

Después de muchos intentos por resolver este último problema, el matemático alemán Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demostró, en el año 1882, que el número π es *trascendente*. Con este resultado quedó demostrada la imposibilidad de cuadrar el círculo con regla y compás.

Posterior a la demostración de la imposibilidad de construir con regla y compás el número π, muchos matemáticos continuaron trabajando con el problema geométrico con el propósito de obtener construcciones aproximadas de dicho número. Algunas construcciones aproximadas del número π con regla y compás, se deben a *Ramanujan*, publicadas en 1913 en un paper llamado *Squaring the circle*. A continuación se presenta una de sus construcciones, que da una aproximación de 355/113 para el número π:

Dada una circunferencia de centro C y radio r.

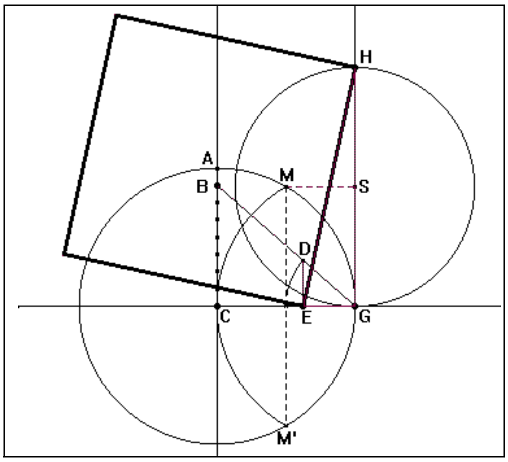
- Construir el punto B en la recta CA tal que $CB = \frac{7}{8}CA$
- Trazar la recta BG y construir el punto D tal que $GD = \frac{1}{2}CG = \frac{r}{2}$
- Trazar por *D* la perpendicular a *CG*, y determinar en esta recta el punto E
- Trazar la circunferencia con centro *G* y radio *GC*=*r*. Determinar el punto *M*, punto de intersección de esta circunferencia con la circunferencia dada

- Por M trazar la recta perpendicular a CA, trazar por G la recta paralela a CA, y determinar el punto S.

- Trazar la circunferencia con centro en S y radio SG. Sea H el punto de intersección entre esta circunferencia y la recta GS.

- En el triángulo rectángulo EGH se cumple: $EG^2 + GH^2 = EH^2$, equivalente a:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{113}}r\right)^2 + \left(r\sqrt{3}\right)^2 = r^2\,\frac{355}{113}$$



Así, el área del cuadrado de lado $EH = EH^2 = r^2\,\dfrac{355}{113} \approx$ área del circulo

Otra construcción con regla y compás presentada también por este matemático hindú, en 1914, entrega el valor $(9^2 + 19^2/22)^{1/4} \approx \underline{3.14159265}25$ para el número π.

Comentarios finales

En este trabajo se ha abordado uno de los problemas más famosos de la historia de la matemática: la cuadratura del círculo. Se dice que cuando los griegos descubrieron que $\sqrt{2}$ no es un número racional, celebraron en grande tal descubrimiento. El descubrimiento de que π se puede expresar como la suma o producto de infinitos números totalmente diferentes y aparentemente no relacionados, es mucho más profundo. Así, el área de la más perfecta de las figuras geométricas, el círculo, no puede determinarse por medios finitos, con herramientas euclidianas.

Bibliografía

[1] Alsina, C. Trillas, E. *Lecciones de Algebra y Geometría.* Editorial Gustavo Gill, S.A. Rosellón, Barcelona. 1984

[2] Courant, R. and Robbins, H. *¿Qué es la matemática*?. Oxford University Press. 1996.

[3] Herstein, I.N. *Algebra moderna*. Editorial Trillas. 1970.

[4] *A history of Pi*. History topics. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_trough_the_ages.html

[5] Kasner, E. y Newman, J. *Matemáticas e imaginación*. CECSA. 1972.