Sobre el infinito

Juana Contreras S.[♣]
Claudio del Pino O.[♦]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Si el espacio es infinito estamos
en cualquier punto del espacio.
Si el tiempo es infinito estamos
en cualquier punto de tiempo.
El libro de arena.
Jorge Luis Borges

Introducción

Uno de los conceptos más escurridizos en matemática es el del infinito. Todo lo que vemos y sentimos, en general, tiene un comienzo y un final. Nuestra experiencia acota y limita la comprensión de fenómenos que, como el infinito, escapan a nuestra realidad cotidiana.

Sin embargo, desde los primeros cursos de matemática, tanto profesores como alumnos, se ven enfrentados a conjuntos con una cantidad infinita de elementos, por ejemplo, los números con los cuales aprendemos a contar: los números naturales $IN = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Sin embargo, profesores y alumnos no se detienen a reflexionar sobre el posible significado que puede tener el hecho de decir que este conjunto es infinito.

Como la mayoría de los temas relevantes tienen sus orígenes en los griegos, el infinito no es una excepción. Aristóteles distinguía dos tipos de infinitos: un infinito potencial (que aceptaba) y un infinito actual (que no admitía). Para él, decir que los números naturales eran infinitos, quería decir que dado un número natural cualquiera, siempre era posible encontrar otro natural más grande. Esta es la idea del infinito potencial. Este concepto del infinito acepta Euclides cuando afirmaba que ". . . para toda línea larga, siempre existe otra más larga. . .". En cambio, pensar en los naturales como *una* entidad infinita (completa y acabada) y trabajar situaciones que la involucren como tal, no era aceptado por Aristóteles. Esta es la idea del infinito actual. Esta idea prevaleció por mucho tiempo (¡siglos!). Hasta que recién a comienzos del siglo XIX, con los aportes del matemático ruso-alemán George Cantor, junto

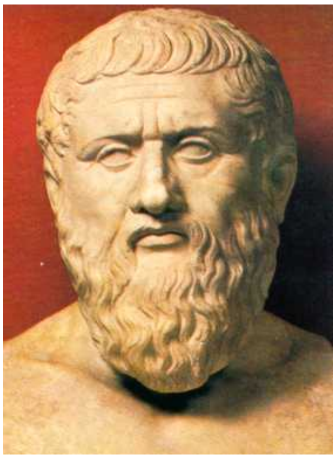
♣ e-mail: jcontres@utalca.cl
♦ e-mail: cdelpino@utalca.cl

con aceptar el infinito actual, se dio un tratamiento ordenado, desde el punto de vista matemático, de este vital concepto[2]. Como siempre, son muchos los matemáticos que fueron aportando ideas importantes sobre esta temática, entre otros, Galileo[3], Bolyai, Bolzano y Dedekind, pero como siempre, se menciona el que finalmente ordena y formaliza todo. En la teoría de conjuntos infinitos, Cantor tiene el honor de cerrar el ciclo de pensamientos sobre el infinito y, al mismo tiempo, abrir un nuevo mundo sobre este tema.

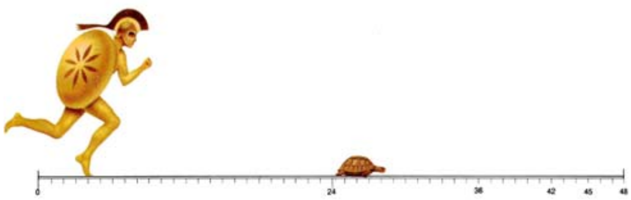
El infinito en la enseñanza

El infinito, aunque no es tratado formalmente en la enseñanza de la matemática, este escurridizo concepto igual se las ha arreglado para irrumpir, directa o indirectamente, en diversas situaciones presentes en los cursos de matemática. Por ejemplo:

Paradoja de Zenón



Esta paradoja fue planteada por Zenón de Elea (495-435 adC), en el mundo griego del siglo V adC. Ella puso en jaque a todos los insignes filósofos de esa época. Esta situación es una paradoja pues su formulación va en contra de la intuición natural. Zenón postulaba que *en una carrera entre el héroe Aquiles y una tortuga, en la cual Aquiles da una ventaja inicial a la tortuga, Aquiles no podía ganar dicha carrera*. Su argumento era el siguiente: supongamos que la carrera es de 100m, Aquiles da una ventaja de 10m a la tortuga, y la velocidad de Aquiles es el doble de la velocidad de la tortuga. En el tiempo que le toma a Aquiles llegar a la mitad del camino (punto de partida de la tortuga), la tortuga habrá avanzado un tramo de 25m. En ese instante, tenemos a Aquiles detrás de la tortuga (igual que al comienzo, pero ahora más cerca). A continuación, en el tiempo que le toma a Aquiles recorrer los 25m que lo separan de la tortuga, ésta ha avanzado 12.5m. Y así sucesivamente, se tendrá siempre a la tortuga más adelante que Aquiles. La paradoja es evidente, pues es absolutamente claro que si, por ejemplo, la velocidad de Aquiles es de 10m/seg y la velocidad de la tortuga 5m/seg., Aquiles alcanza a la tortuga en exactamente 2 segundos. En este momento Aquiles ha avanzado 20m y la tortuga 10m. La carrera la gana Aquiles en 10seg., instante en que llega a la meta, mientras que en ese momento ¡la tortuga se encuentra a 40m de la meta!.



[2] Como es de suponer, las ideas revolucionarias de Cantor tuvieron fuertes detractores, entre ellos el matemático Leopold Kronecker, célebre es su frase: *Dios creo los números naturales, todo lo demás es obra del hombre.*
[3] Galileo ya había probado que hay tantos cuadrados perfectos como números naturales.

Paradoja del movimiento: El conejo y la zanahoria.

Otra paradoja de Zenón, hace referencia a la imposibilidad del movimiento. Esta paradoja tiene varias versiones. Una versión, afirma que un conejo que se encuentra a cierta distancia de zanahoria, nunca podrá llegar a ella. Su argumento era: si el conejo se encuentra a una distancia d de la zanahoria, el conejo antes de alcanzar la zanahoria debe avanzar la mitad del camino que lo separa de la zanahoria ($d/2$). Desde este punto, nuevamente, antes de llegar a la zanahoria, debe avanzar la mitad de la distancia que lo separa de la zanahoria, en este caso, $d/4$. Y así sucesivamente. Por lo tanto, ¡el conejo nunca llegará hasta la zanahoria!.

Números decimales.

En el caso de los decimales infinitos (periódicos o no), el infinito está presente. Tal es el caso, por ejemplo, del número $0.333\ldots = 0.\overline{3}$, pues este número equivale a:

$$0.\overline{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$

Es decir, $0.\overline{3}$ equivale a la suma de una cantidad de infinitos términos.

Una suma especial.

Es frecuente encontrarse con sumas de una cantidad de infinitos sumandos. En estos casos no es fácil establecer el valor, en caso que exista, de esta suma. Por ejemplo, ¿cuál es el valor de la suma: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$?. Una respuesta podría ser que $S = 0$, pues

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

Otra respuesta posible es que $S = 1$, pues

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

Una tercera respuesta, podría ser que $S = 1/2$, pues

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

de donde se obtiene que $S = 1/2$.

Como es imposible que S tome valores distintos, aquí algo debe estar incorrecto. Por lo tanto, en esta situación donde interviene el infinito, nuevamente se encuentran problemas.

Comentarios sobre las paradojas anteriores.

Las paradojas recién comentadas se basan en el principio intuitivo: "*la suma de infinitas cantidades positivas es infinita*". En matemática estas situaciones se trabajan en el tema de series infinitas. Una serie infinita es una expresión del tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{*}$$

La serie (*) existe (o converge), cuando existe (finito) el $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$, donde $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ es la sucesión de sumas parciales de (*). Una situación de este tipo se encuentra cuando se estudian las series geométricas. Si x es un número real, se llama serie geométrica, con razón x, a la serie

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \qquad (**)$$

Como es sabido, la serie (**) existe cuando $|x|<1$, pues en este caso:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots = \lim_{n\to+\infty}\left(1+x+x^2+\cdots x^{n-1}\right)= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

A continuación volvemos a visitar las paradojas anteriores, pero ahora teniendo en cuenta los comentarios realizados sobre series.

Paradoja de Zenón revisitada.
Usando la misma información anterior: velocidad de Aquiles 10m/s, velocidad de la tortuga 5m/s, ventaja inicial de la tortuga 10m, distancia de la carrera 100m.

tiempo (en segundos)	**avance Aquiles (en metros)**	**avance tortuga (en metros)**	**distancia entre Aquiles y la tortuga (en metros)**
0	0	0	10
1	10	5	15-10=5=10/2
+1/2	5	5/2	(10+5+5/2)-(10+5)=$10/2^2$
$+1/2^2$	5/2	$5/2^2$	$(10+5+5/2+5/2^2)-(10+5+5/2)=10/2^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
$+1/2^n$	$5/2^{n-1}$	$5/2^n$	$10/2^{n+1}$

Luego, después de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}$ segundos, la distancia que separa a Aquiles de la tortuga es de $10/2^{n+1}$. Entonces, es claro que Aquiles alcanza la tortuga cuando *n* tiende a $+\infty$, pues $\lim\limits_{n\to+\infty} 10/2^{n+1}=0$, y el tiempo que se demora en alcanzarla es

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1-1/2}=2\text{ segundos.}$$

Observar que este resultado es, como era de esperar, coherente con los comentarios realizados en la presentación de la paradoja de Zenón.

Paradoja del movimiento revisitada.
En este caso, la suma de las distancias que debe ir recorriendo el conejo es

$$\frac{d}{2}+\frac{d}{2^2}+\frac{d}{2^3}+\cdots=\frac{d/2}{1-1/2}=d$$

Por lo tanto, el conejo efectivamente llega a la zanahoria!!.

Una suma especial revisitada.
Para determinar si existe la suma $S=1-1+1-1+1-\cdots$, se debe estudiar su correspondiente sucesión de sumas parciales. En este caso $S_{1=}1$, S_2=1-1=0, S_3=1-1+1=1, S_4=0, etc. Luego, no existe $\lim S_n$. Por lo tanto, esta suma infinita no existe.

Se deja al lector, *revisitar* bajo el concepto de series infinitas, el resto de las situaciones comentadas sobre el infinito en aspectos de la enseñanza de la matemática.

Ahora, empezaremos a caminar por la senda dejada por Cantor, que lleva a la definición que nos permitirá establecer, desde el punto de vista matemático, cuándo un conjunto es considerado infinito.

Conjuntos equipotentes

Si un profesor ingresa a una sala de clases y desea establecer si el número de sillas es igual al número de sus alumnos presente, él podría proceder de dos maneras:

Manera 1:

La manera más evidente es simplemente contar, por separado, las sillas y sus alumnos, y luego comparar. De esta manera se sabría *además* cuantas sillas hay en la sala y cuantos alumnos se encuentran presentes.

Manera 2:

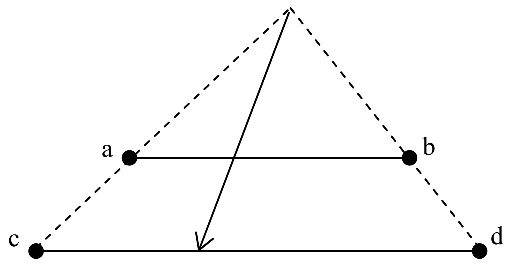
La manera más práctica es simplemente pedirles a sus estudiantes que tomen asiento. Después que los estudiantes han ejecutado esta acción, pueden ocurrir tres situaciones. Si quedan sillas vacías significará, obviamente, que hay más sillas que alumnos. Si quedan alumnos de pié significará que hay más alumnos que sillas. Si no quedan sillas vacías ni alumnos de pié, significará que el número de sillas es exactamente igual al número de alumnos presentes. Observar que en este último caso, se sabría que hay tantas sillas como alumnos, ¡sin saber el número de sillas ni de alumnos!. En este último caso, lo que ha pasado, mirado desde la perspectiva de las funciones, es que se ha establecido una función biyectiva entre los alumnos y las sillas. Esta idea es la que tomó Cantor para definir cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. En efecto:

Definición: Se dice que dos conjuntos A y B tienen *la misma cantidad de elementos*, siempre y cuando exista una función $f : A \to B$ biyectiva. En tal caso se dice que A y B tienen la misma *potencia* o que son *equipotentes*, y se anota $A \approx B$.

Ejemplos de conjuntos equipotentes

- Observar que cuando un conjunto A es finito (digamos de n elementos) y se cuentan sus elementos, lo que se hace, desde que se aprendió a contar, es establecer una correspondencia biyectiva entre $\{1,2,3,\cdots,n\}$ y A.

- El conjunto de los números naturales, *IN*, tiene el mismo número de elementos que el conjunto de los naturales pares, 2*IN*. En efecto, la función $f : IN \to 2IN$, definida por $f(n) = 2n$ es biyectiva.
- $[0,1] \approx [-1,5]$. En efecto, $f : [0,1] \to [-1,5]$, definida por $f(x) = 6x - 1$ es claramente biyectiva. Verificar que, en general, dos intervalos cualesquiera [a,b] y [c,d] son equipotentes. Una ilustración gráfica que ilustra esta situación es:



Observar que esta afirmación estable que, por ejemplo ¡¡el intervalo [0, 0.0000001] *tiene la misma cantidad de elementos* que el intervalo $[-10^{100}, 10^{100}]$!!.

La relación de equipotencia entre conjuntos, satisface las propiedades de reflexibidad, simetría y transitividad, es decir,

Teorema: La relación de equipotencia de conjuntos es una relación de equivalencia.

Como la relación de equipotencia es de equivalencia, ella determina una partición entre los conjuntos. Si A es un conjunto, la clase de equivalencia de A viene definida y anotada por

$$|A| = \{B / A \approx B\}$$

Observar que en |A| se encuentran todos los conjuntos que tienen el mismo número de elementos que el conjunto |A|.

Cardinal de un conjunto.

Sea *A* un conjunto. Sea *B* un conjunto cualquiera de |*A*|, entonces *A* y *B* tienen el mismo número elementos. Se denomina cardinal de *A* al número común de elementos de cualquier conjunto en |*A*|. El cardinal de *A* se anota #(*A*).

Observar que dos conjuntos *A* y *B* tienen el mismo número de elementos siempre y cuando #(*A*) = #(*B*).

Por ejemplo:

- #(Φ) = 0
- #({1}) = 1
- #({1,2}) = 2
- #({1,2,3}) = 3

⋮

- #({1,2,3,…,*n*}) = *n*

⋮

- El cardinal de los números naturales, se define por $\aleph_0$, es decir, #(*IN*) = $\aleph_0$.
- #({naturales pares}) = #({naturales impares}) = $\aleph_0$
- #([1,2]) = #([100,20000])

Conjunto enumerable. Conjunto numerable.

Un conjunto A se denomina enumerable cuando su cardinalidad es $\aleph_0$, es decir cuando $A \approx IN$. Un conjunto se dice numerable si es finito o enumerable.

Claramente, los subconjuntos de *IN*, los naturales pares y los naturales impares son ejemplos de conjuntos enumerables. Del mismo modo, estos mismos conjuntos son también numerables.

A continuación se presentan otros conjuntos, *más grandes* que *IN* (en el sentido que *IN* está contenido estrictamente en ellos) y que también son enumerables. Estas situaciones rompen, de alguna manera, el principio griego que establece que *el todo es mayor que sus partes*.

El conjunto de los números enteros en enumerable.

Considerar la función $f : IN \to Z$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & si\ n\ es\ par \\ -(n-1)/2 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

la cual proporciona la siguiente enumeración de los números enteros:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \cdots \end{array}$$

luego, se ha verificado que ¡¡existen tantos números enteros como números naturales!!.

El conjunto de IN x IN es enumerable

Un esquema visual que muestra que IN x IN es enumerable es el siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) \to & (1,2) & (1,3) \to & (1,4) & (1,5) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Este esquema, establece una función[4] f biyectiva entre IN y *IN* x *IN,* en la cual $f(1)=(1,1)$, $f(2)=(1,2)$, $f(3)=(2,1)$, $f(4)=(3,1)$, $f(5)=(2,2)$, etc.
Una manera alternativa de comprobar el resultado en cuestión es considerar la siguiente función de *IN* en *IN* x *IN*:

$$f(n)=\begin{cases}(1,1) & si \quad n=1\\ (i+1,j-1) & si \quad f(n-1)=(i,j), con\ j>1\\ (1,i+1) & si \quad f(n-1)=(i,j), con\ j=1\end{cases}$$

¿Cuál es el valor de, por ejemplo, $f(6)$?. Calcular una cantidad razonable de imágenes para aceptar que esta función es efectivamente biyectiva.
Siguiendo la misma idea precedente, se puede verificar que la unión de dos (o una cantidad finita) conjuntos enumerables es también enumerable.

Un resultado más sorprendente es:

El conjunto de los números racionales es enumerable. Es decir, ¡¡existen tantos números racionales como naturales!!.

Ya se ha establecido que los conjuntos *IN*, *Z* y *Q* son equipotentes, todos tienen cardinalidad igual $\aleph_0$. Veamos un ejemplo de un conjunto no enumerable.

El intervalo]0,1[*no es enumerable.*
La comprobación de este resultado, se hace por un método (indirecto) que Cantor diseñó especialmente para este efecto[5].
Se supone que]0,1[es enumerable y que la siguiente es una enumeración de todos los elementos de este intervalo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}\cdots \\ a_2 &= 0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}b_{25}\cdots \\ a_3 &= 0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}b_{35}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde todas las expansiones decimales se toman de tal manera que ninguna expresión de la derecha es un decimal finito. Por ejemplo, si a un a_i le corresponde 0.34, éste se escribe como 0.339999….
Ahora, se considera el siguiente real entre 0 y 1: $c=0.c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}\cdots$ donde $c_{11}\neq b_{11}$, $c_{22}\neq b_{22}$, $c_{33}\neq b_{33}$, $c_{44}\neq b_{44}$, … . Por ejemplo, se podría tomar:

[4] *siguiendo* las flechas.
[5] Este método es conocido como *método de diagonalización de Cantor*.

$$c_{ii} = \begin{cases} 0 & si \quad b_{ii} = 9 \\ 1 + b_{ii} & si \quad b_{ii} \neq 9 \end{cases}$$

Por lo tanto, c es distinto de todos los a_i. Luego, la enumeración supuesta no contiene todos los reales del intervalo]0,1[.

Luego, del resultado precedente se tiene que #(]0,1[) $\neq \aleph_0$. La cardinalidad del intervalo]0,1[se suele designar por c. Es decir, #(]0,1[) = c.

Conjunto infinito.

Un conjunto *A* es infinito si tiene un subconjunto propio con su misma cardinalidad, es decir, *A* es infinito cuando existe un conjunto *B*, $B \subset A$, $B \neq A$ tal que #(*A*) = #(*B*).

Por ejemplo, el conjunto *IN* es infinito, pues el conjunto de los naturales pares es un subconjunto propio de *IN* y ambos tienen, como ya se ha establecido, el mismo cardinal $\aleph_0$.

También el conjunto de los números reales es infinito pues #(]-1,1[) = #(*IR*). Para verificar esta afirmación basta considerar la función de]-1,1[en IR, definida por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. En el siguiente gráfico de esta función se observa (visualmente) que ella es biyectiva entre los conjuntos en cuestión.

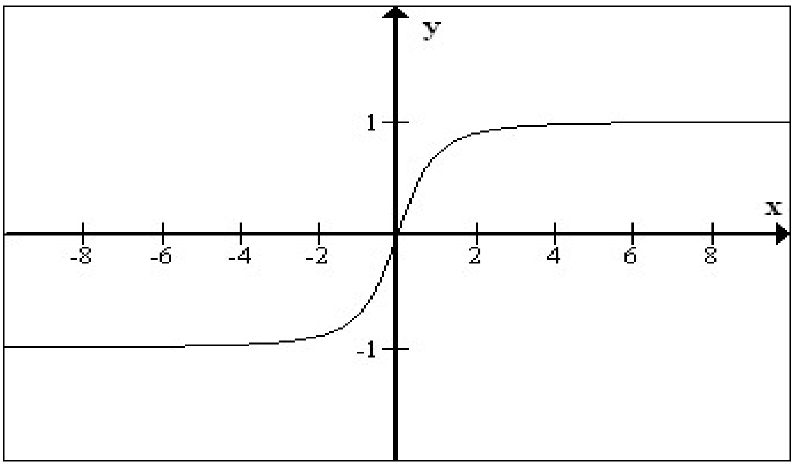


Grafico de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Como $IR = Q \cup Q^c$ y Q es numerable y *IR* tiene la potencia del continuo, se deduce que el conjunto de los números irracionales, Q^c, también tiene la potencia del continuo. En otras palabras, existen tantos números irracionales como números reales.

Hasta ahora, se tienen dos infinitos distintos. De aquí surgen dos preguntas claves:

- ¿Existe algún conjunto infinito entre *IN* e *IR*?.
- ¿Existen conjuntos infinitos más grandes que *IR*?.

La primera pregunta tiene respuesta, hasta el momento, negativa. En realidad se supone y se acepta, el siguiente resultado, que como aún no ha sido probada, se conoce con el nombre de:

Hipótesis del continuo: No existe un cardinal entre $\aleph_0$ y c.

La segunda pregunta tiene, como era de esperar, una respuesta afirmativa. En realidad, tal como se verifica a continuación, existe *toda* una jerarquía de infinitos diferentes.

Teorema de Cantor

Dado un conjunto A, no existe una biyección entre A y $P(A)$[6], donde $P(A)$ representa el conjunto conformado por todos los subconjuntos de A.

Demostración. Se hará una demostración indirecta. Supongamos, entonces, que existe una biyección

$$f : A \to P(A)$$

luego, a cada x en A se le asocia un conjunto $f(x)$, donde $f(x) \subseteq A$. También, todo subconjunto de A (elemento de $P(A)$) es imagen, $f(x)$, de algún elemento x de A.

Ahora se considera el siguiente conjunto

$$B = \{a \in A /\ a \notin f(a)\}$$

Es claro que $B \subseteq A$. Luego, existe un $z \in A$, para el cual $B = f(z)$. Como $z \in A$ y $B = f(z)$, z debe estar o no en el conjunto B. A continuación se analizan estas opciones:

- Si $z \in B$, entonces por la definición del conjunto B, $z \notin f(z)$. Pero como $B = f(z)$, se tiene la contradicción $z \notin B$.
- Si $z \notin B$, entonces $z \in f(z)$. En este caso, se tiene la contradicción $z \in B$.

Como en ambos casos se llega a una contradicción, se deduce que el supuesto inicial es incorrecto.

Por lo tanto, no existe una biyección entre un conjunto y su conjunto potencia.

Del resultado precedente, dado un conjunto A, se tiene que #(A) es estrictamente menor que #($P(A)$). Luego,

$$\#(IN) < \#(P(IN)) < \#(P(P(IN))) < \cdots$$

constituye una cadena infinita de cardinales infinitos.

Nota: No es difícil verificar que $\#(P(IN)) = c = \#(IR)$.

[6] $P(A) = \{X / X \subseteq A\}$

Se ha dado un breve paseo sobre el escurridizo concepto del infinito. Matemáticamente el infinito más pequeño es el de los números naturales. El siguiente infinito es el de los números reales. Se asume, aunque no se logrado probar ni refutar, que entre *IN* y *IR* no existen conjuntos con cardinalidades diferentes a las de estos conjuntos. Por otro lado, Cantor logró verificar que sobre los cardinales de *IN* y *IR* existe una categoría infinita de cardinales infinitos.

Como es de suponer el camino del infinito no podría ser finito. Luego, lo que se ha presentado es una mirada que solo intentaba entreabrir una ventana de este inconmensurable edificio.

Apéndice

Para terminar se entregan algunos pensamientos, de diversos matemáticos, sobre el infinito:

- Algunos de los posibles mundos son finitos, algunos infinitos, y nosotros no tenemos forma de saber a cuál de esos dos tipos pertenece el nuestro.

  Bertrand Russell
  Introduction to Mathematical Philosophy, p.141.

- Me aterra el silencio eterno de esos espacios infinitos.

  Blaise Pascal
  Pensamientos, p.108.

- Sólo dos cosas son infinitas, el universo y la estupidez humana, y de lo primero no estoy seguro.

  Albert Einstein

- [El infinito] nunca se encuentra realizado, no está presente en la naturaleza, ni es admisible como fundamento de nuestro pensamiento racional.

  [...] el infinito, que es en realidad la negación de un estado vigente en todas partes, es una espantosa abstracción, tratable solamente mediante el uso consciente o no del método axiomático.

  David Hilbert
  La máquina y las demostraciones, p.48.

- En la Teoría de Conjuntos, no existe entre lo finito y lo infinito, ninguna barrera fundamental

  Henri Weyl

- El infinito ha inquietado, como cuestión alguna en tiempo alguno, el espíritu humano. Ha actuado de manera tan incitante y fructífera como ninguna otra idea. Pero el infinito requiere también, como ningún otro concepto, de una explicación.

  David Hilbert

- La individualidad implica el infinito, y sólo quien puede comprender éste llegará a tener el conocimiento del principio de individuación.

Gottfried Leibniz
Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano.

Blibliografía

- Kuratowski, K. *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Editorial Vincens-Vives. 1966.
- Lipschuts, L. *Teoría de conjuntos y temas afines*. Editorial Mc Graw Hill. Serie Schaum. 1988.
- Díaz N., Pedro. *Reflexiones sobre El Concepto de Infinito*. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/
- Cajori, F. *Historia de los Argumentos de Zenón sobre el Historia de los Argumentos de Zenón sobre el Movimiento*. http://www.matedu.cinvestav.mx/librosydocelec/Cajori.pdf
- Dauben, W. Joseph. *Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos* http://ar.geocities.com/paginadeprueba2005/Cantor/georg_cantor_y_la_teoria_de_transfinitos.htm
- Isaacs G. Rafael. *Relaciones, Funciones y Enumerabilidad.* http://matematicas.uis.edu.co/~risaacs/AMA/doc/Relacionesyfunciones.pdf