…Frisos…Frisos…Frisos

Juana Contreras Sepúlveda.[♣]
Claudio del Pino Ormachea.[♦]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Introducción

En todas las civilizaciones el ser humano ha observado las formas geométricas en la naturaleza que le han servido de base en diversas manifestaciones artísticas, Así por ejemplo, encontramos creaciones artísticas en obras arquitectónicas, en esculturas, en pinturas, en decoraciones de objetos como las cerámicas y joyas, en los que están presentes de modo creativo diversos elementos geométricos

En los grabados sumerios, en los mosaicos árabes, en los dibujos de Escher, por ejemplo, encontramos representaciones artísticas, admiradas por todos, cuyo análisis permite el estudio de las formas geométricas planas elementales y las isometrías o movimientos rígidos del plano.

Figura 1.
Grabado sumerio

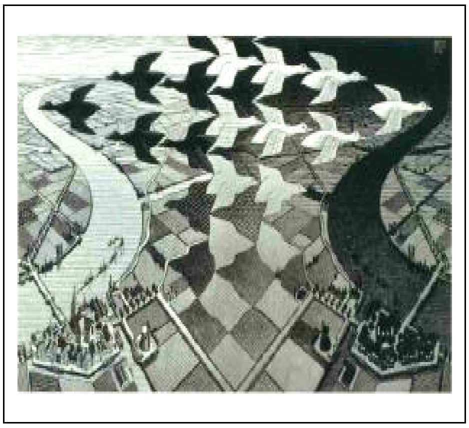


Figura 2.
Día y Noche, de M. C. Escher

Entre los elementos artísticos más utilizados desde la antigüedad están los frisos y los mosaicos, en los cuales se combinan elementos geométricos del plano, interesantes para el estudio de las formas planas y sus movimientos.

♣ e-mail: jcontres@utalca.cl
♦ e-mail: cdelpino@utalca.cl

Uno de los ejemplos más famosos de este tipo de ornamento son los mosaicos que se pueden contemplar en la Alhambra de Granada (**Figura 3**), en los cuales se observa un motivo que se repite en dos direcciones distintas del plano.

Figura 3

Otros ejemplos de mosaicos se encuentran en el pavimento de las ciudades, en edificios y en embaldosados de muchos lugares.

El estudio de las isometrías del plano, integrado al análisis y creación de frisos y mosaicos, puede permitir que los estudiantes se aproximen a la adquisición del concepto de congruencia, desarrollar en ellos la habilidad para percibir las formas y capacidades como la de visión espacial, y puede dar lugar a un campo de estudio desde una perspectiva de resolución de problemas.

El tema de los frisos y teselaciones tiene una riqueza de naturaleza diversa, ya que se puede estudiar desde el punto de vista histórico, artístico y matemático, y es posible tratarlos en todos los niveles escolares, de manera gradual.

Los frisos

Los frisos se presentan bajo la forma de bandas entre bordes paralelos ilimitados en ambos sentidos. Los motivos que los componen se repiten con regularidad (igual distancia entre ellos) y obedecen reglas de las transformaciones del plano tales como: traslaciones, rotaciones (de 180° o simetrías centrales), reflexiones horizontales o verticales, simetrías con deslizamiento. Un ejemplo de friso se muestra en la **figura 4**.

Figura 4
Friso de estatuas, en la Catedral de Notre Dame, París

Algunas definiciones de friso:

1. Un friso es una franja horizontal decorativa que forma parte del entablamento, entre el arquitrabe y la cornisa.

2. Un friso (llamado en lenguaje usual greca o cenefa) es una banda decorativa rectangular en el cual, un motivo se repite en una dirección, en ambos sentidos.

   En los frisos ornamentales existe un motivo que es repetido una y otra vez siguiendo una dirección. Ejemplos de frisos ornamentales:

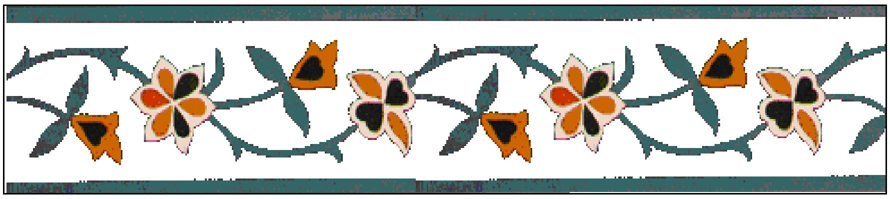


Figura 5

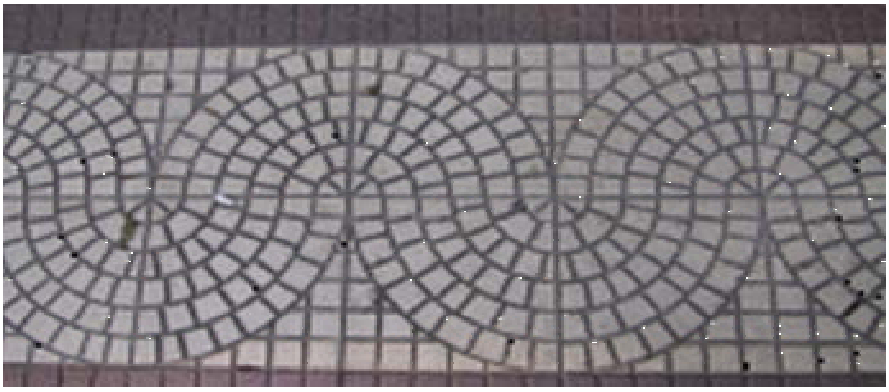


Figura 6

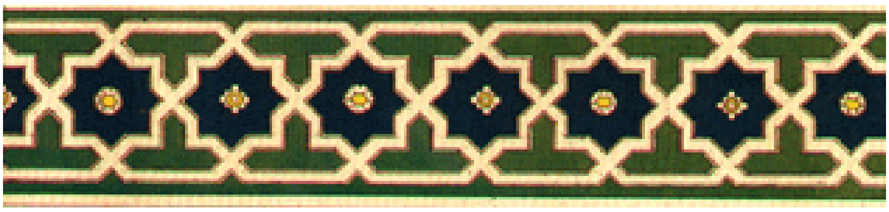


Figura 7

En el primer ejemplo (**figura 5**) se observa que las únicas isometrías que dejen invariante el friso son una traslación y cualquier múltiplo entero de ella. En el segundo ejemplo (**figura 6**), las isometrías que dejan invariante el friso son una traslación y cualquier múltiplo entero de ella, reflexiones verticales y rotaciones en 180º. Notar que en este friso, las simetrías del motivo que se traslada en la dirección de la traslación que genera el friso, son una reflexión vertical y una rotación en 180º. En el tercer ejemplo (**figura 7**), el friso es invariante por una traslación y múltiplos enteros de ella, una flexión horizontal, reflexiones verticales y rotaciones en 180º.

Matemáticamente significa que el grupo de simetría de un friso (isometrías que dejan invariante al friso), contiene siempre una única traslación y múltiplos enteros de ella, pudiendo contener otras isometrías. Esto lleva a definir un friso de manera más formal, caracterizado por el grupo de isometrías del plano que lo deja invariante, llamado grupo de simetría del friso.

3. Una definición más formal de friso: Sea L una recta (considerada en dirección horizontal) con vector director u. Un grupo F de isometrías del plano es el grupo de simetría de un friso, cuando deja invariante la recta L y contiene como únicas traslaciones a los elementos del grupo generado por la traslación t_u en la dirección del vector u.

   Luego, las únicas isometrías que pueden formar parte de un grupo de friso con recta invariante L, son
   - $T_{n\,u}$: traslaciones con vector director un múltiplo entero de u
   - **Sh**: Reflexión con respecto a la recta L, llamada simetría horizontal
   - **Sv**: Reflexión con respecto a una recta vertical perpendicular a L, llamada simetría vertical
   - **G**: Reflexión con deslizamiento, con deslizamiento en la dirección de la recta L (o del vector u)
   - **R**: Rotación en 180º con centro en un punto de la recta L.

   Y combinaciones de estas isometrías.

Así, un friso se obtiene trasladando un motivo patrón; donde este motivo puede ser generado aplicando isometrías a un motivo base *más pequeño*. Por ejemplo, el motivo patrón del friso que se presenta en la figura 8, es invariante por una reflexión horizontal S, y el grupo simetría del friso es generado por la traslación t_u y la reflexión S.

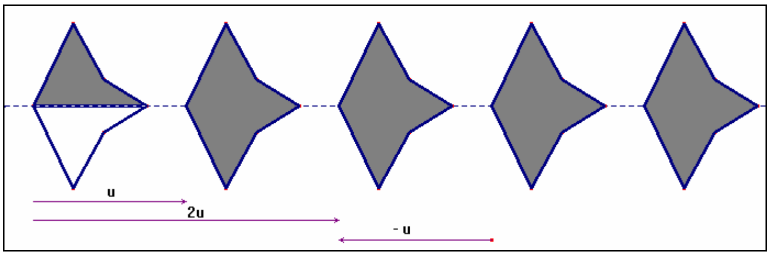


Figura 8

Diseño de frisos

Los frisos tienen como denominador común la repetición de un determinado motivo patrón o figura a lo largo de una banda rectangular, dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del motivo.

Luego, para diseñar un friso se debe considerar:

- La elección de un motivo base
- La elección de las transformaciones geométricas que aplicadas sobre el motivo base permitan *llenar* la banda rectangular que contiene el friso.

La elección del motivo es libre, mientras que las isometrías que permiten generar un friso obedecen a reglas muy precisas establecidas por los *grupos de simetrías de frisos* (grupo de isometrías que dejan invariante el friso). Tales isometrías se encuentran descritas en la tercera definición de friso.

Las figuras 9 y 10 muestran dos frisos cuyo grupo de simetría está generado por una traslación y una reflexión vertical. Ambos pertenecen a una misma clase de friso.

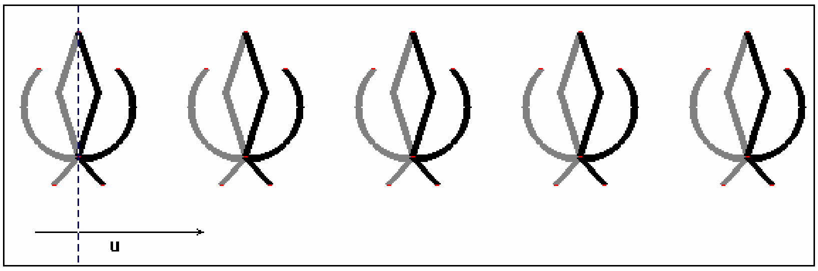


Figura 9

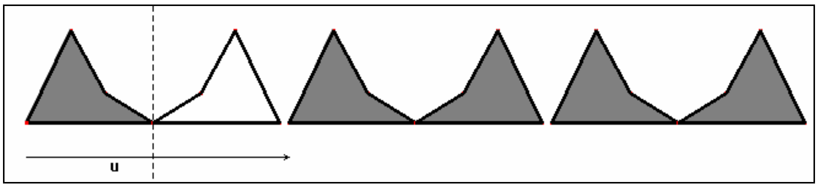


Figura 10

Un problema es estudiar cuantas clases de frisos existen, lo que equivale a determinar que grupos de isometrías dejan invariante un friso, es decir, los diferentes grupos de frisos.

Clasificación de los frisos

Considerando que el grupo se simetría de un friso es generado por una traslación en la dirección de un vector u, y que además puede contener una reflexión horizontal, o una reflexión vertical, o una rotación en 180º o una reflexión con deslizamiento (únicas isometrías que dejan invariante el friso), la notación que más se utiliza para clasificar los frisos usa caracteres que provienen de la cristalografía.

Esta notación consta de cuatro caracteres en un determinado orden, que señala si una isometría pertenece o nó al grupo de simetría del friso, donde el primero es siempre una letra **p**, que indica la existencia de una traslación (en el grupo de un friso siempre hay una traslación) seguida de tres caracteres:

p _ _ _

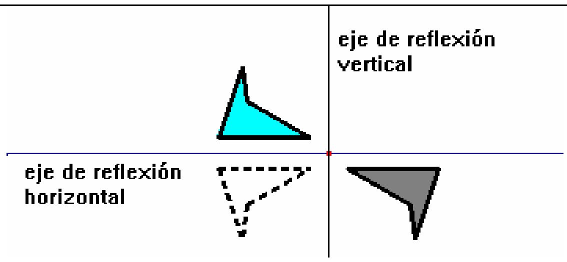
según la siguiente regla:

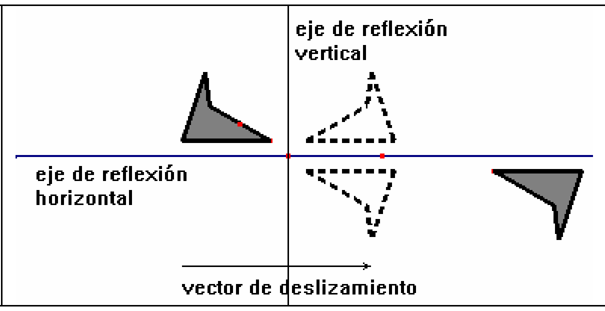
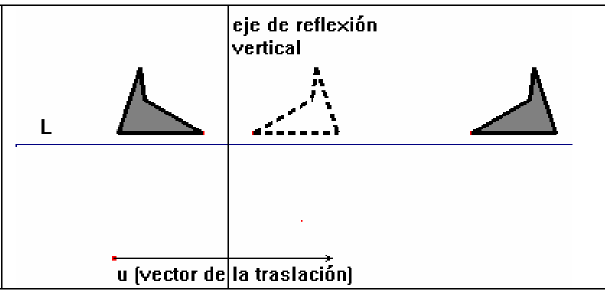
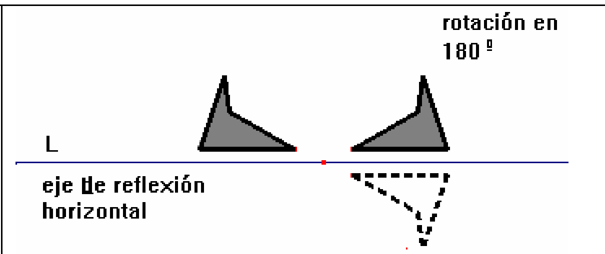
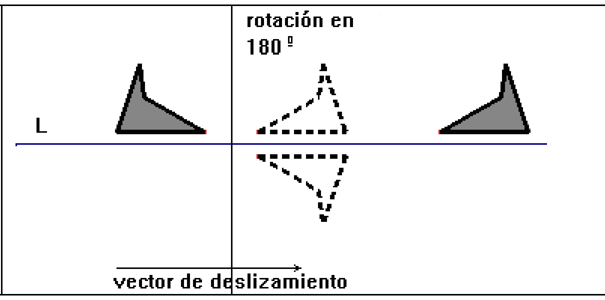
	Isometría		*Caracter*
Primer caracter:	hay traslación	**Si**	**p**
Segundo caracter:	hay reflexión con respecto a un eje vertical	Si	**m**
		No	**1**
Tercer caracter:	hay reflexión con respecto a un eje horizontal	Si	**m**
		Con deslizamiento	**a**
		No	**1**
Cuarto caracter:	Hay rotación en 180º	Si	**2**
		No	**1**

Por ejemplo, los frisos de las figuras 9 y 10 pertenecen a la clase **pm11.** Notar que, el primer caracter de una clase de friso, según esta notación, es siempre la letra **p**.

Para obtener las diferentes clases de frisos del plano, se debe tener presente resultados generales sobre grupos de isometrías del plano y en particular, sobre grupos de simetrías de frisos:

- Las únicas clases de isometrías del plano son: las traslaciones, las reflexiones, las rotaciones y las reflexiones con deslizamiento.
- La composición de dos isometrías es una isometría.
- El grupo de simetría de un friso es el grupo de isometrías que deja invariante el friso.
- El grupo simetría de un friso siempre contiene como subgrupo a un grupo cíclico generado por una traslación t.
- El grupo de simetrías de un patrón de friso puede contener solo isometrías de los siguientes tipos: reflexión con respecto a una recta vertical (Sv) llamada simetría vertical; reflexión con respecto a una recta horizontal (Sh) llamada simetría horizontal; reflexión con deslizamiento en la dirección de la traslación **t (G), o** una rotación en 180º (R). Este grupo es subgrupo del grupo de simetrías del friso.
- Composición de isometrías, que pueden generar un friso:

Sv o **Sh**		rotación en 180º con centro en el punto de intersección de los dos ejes de reflexión

G o **Sv**		Rotación en 180º con centro de rotación en la recta de reflexión horizontal con deslizamiento
t o Sv		Reflexión vertical con eje paralelo al eje de Sv
Sh o R		Reflexión vertical
G o R		Reflexión vertical

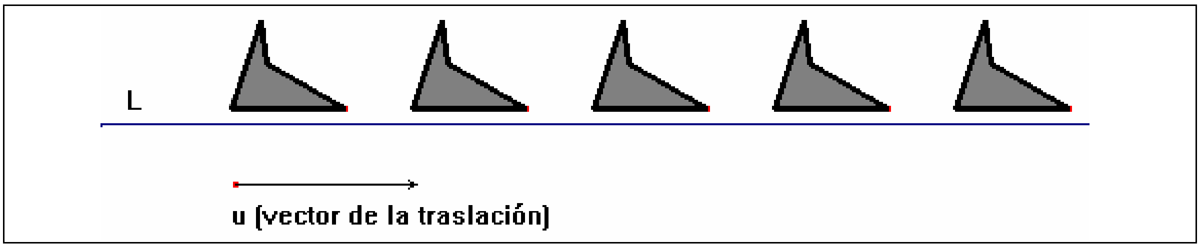
Otras composiciones de isometrías de un grupo de friso se pueden obtener de manera similar con apoyo de una representación gráfica.

A continuación se presentan clases de frisos.

1. Frisos clase **p111**:
   Los frisos de esta clase son los más simples. En éstos, el motivo patrón del friso no presenta simetrías (salvo la identidad), el que se repite al infinito al aplicarle la traslación t o elementos

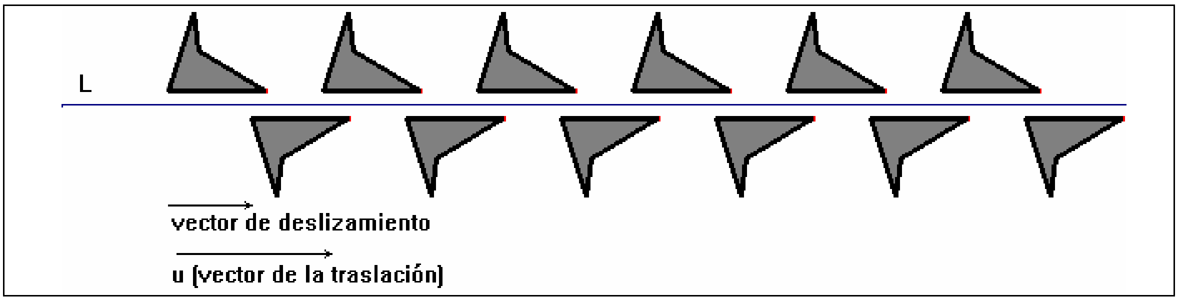
del grupo generado por t. Los frisos de esta clase son invariantes sólo por elementos de grupo generado por la traslación t. Ejemplos de frisos de esta clase son:

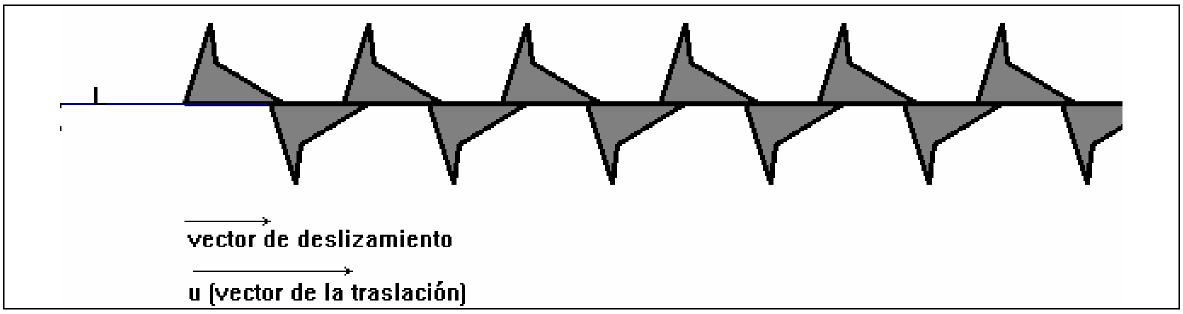
F F F F F F F



El grupo de simetrías de estos frisos es < t >.

2. Frisos clase **p1a1**:
   Los frisos de esta clase son invariantes por una reflexión con deslizamiento y una traslación. Por ejemplo:

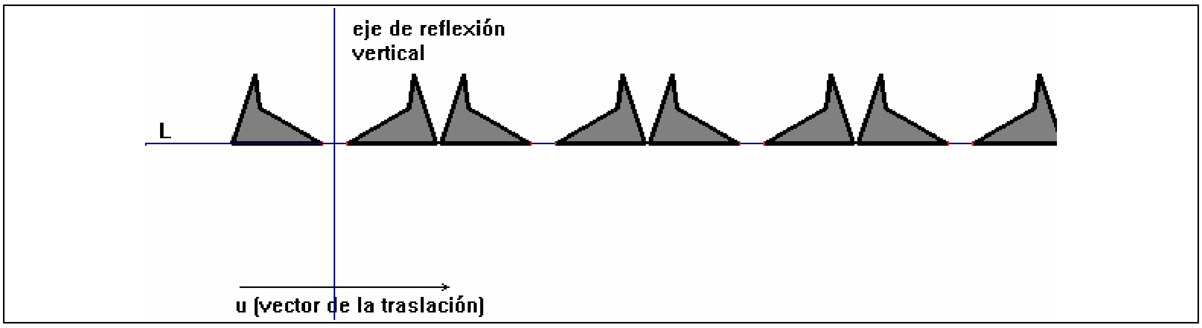




El grupo de simetría de estos frisos es <t, G >.

3. Frisos clase **pm11**:
   En esta clase se encuentran los frisos tales que su grupo de simetría contiene una reflexión con respecto a una recta vertical o simetría vertical y una traslación. Por ejemplo:

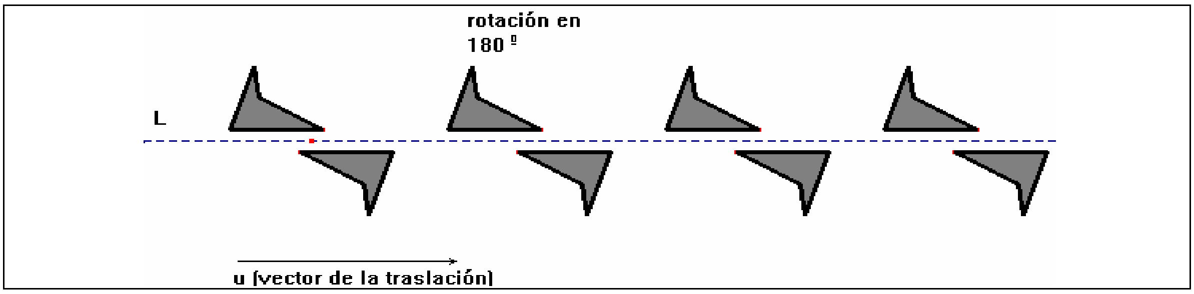
A A A A



El grupo de simetrías de estos frisos es < t, Sv >.

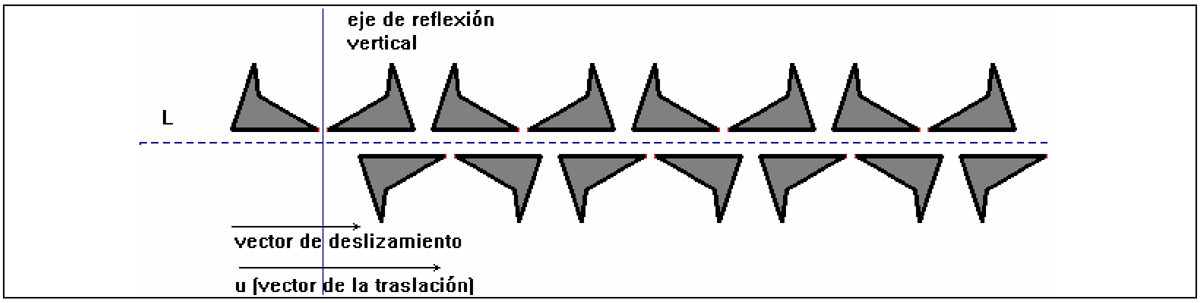
4. Frisos clase **p112**:
   Los frisos de esta clase son invariantes por una rotación en 180º y una traslación. Por ejemplo:

S S S S S



El grupo de simetrías de estos frisos es < t, R >.

5. Frisos clase **pma2**:
   Los frisos de esta clase son invariantes por reflexión vertical, una reflexión con deslizamiento y una traslación. Por ejemplo:

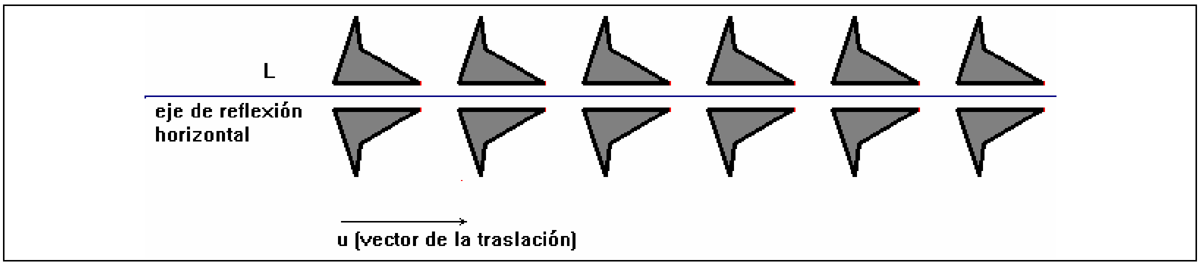


El grupo de simetrías de estos frisos es < *t*, G, S*v* >.

Nota. El grupo de simetría de frisos de esta clase contiene una rotación en 180º, que resulta de la composición G o Sv.

6. Frisos clase **p1m1**:
   En esta clase se encuentran los frisos cuyo grupo de simetrías contiene una reflexión con respecto a una recta horizontal y una traslación. Por ejemplo:

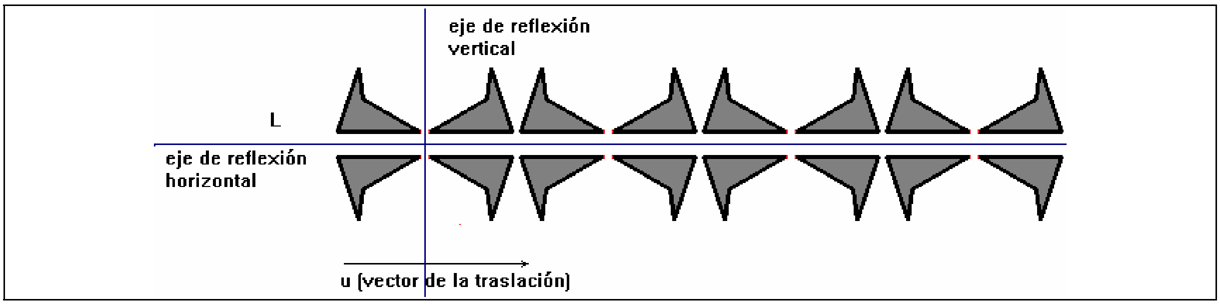
E E E E E

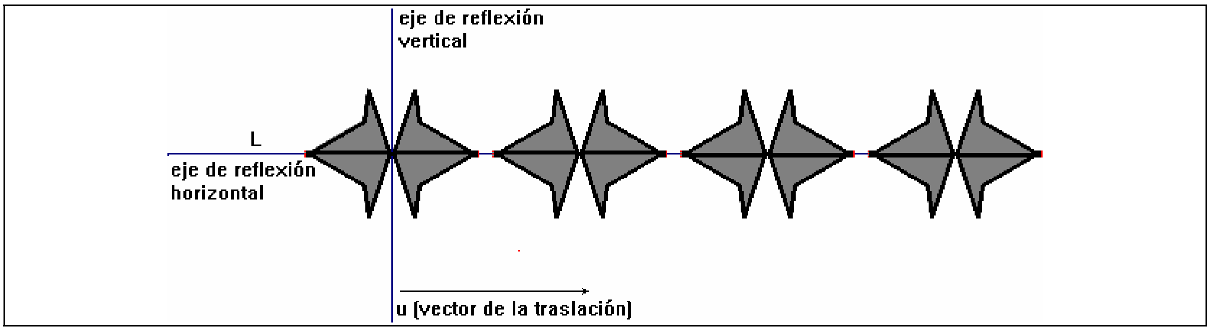


El grupo de simetrías de estos frisos es < *t, Sh* >.

7. Frisos clase **pmm2**:
   En esta clase se encuentran los frisos cuyo grupo de simetrías es generado por una reflexión vertical, una reflexión horizontal y una traslación. Ejemplos de frisos de esta clase son:

…. 8 8 8 8 8…





El grupo de simetría de los frisos de esta clase es < t, Sv, Sh>.

Este grupo contiene una rotación en 180º, que resulta de la composición de isometrías Sv o Sh, y una reflexión con deslizamiento que resulta de la composición t o Sh..

Se sabe que las simetrías de un friso, o isometrías que dejan invariante el friso, pueden ser de las siguientes clases: traslaciones (en una dirección), reflexión horizontal, reflexiones verticales, rotaciones en 180º y reflexiones con deslizamiento en la dirección de la traslación. El problema de encontrar las clases diferentes de frisos equivale a determinar que combinaciones de estas isometrías dejan invariante el motivo patrón de un friso.

Combinando estas isometrías, sin considerar la traslación (ya que en todo grupo de friso hay una traslación), se obtienen 16 combinaciones posibles, numeradas de I a XVI en la tabla. Las filas de la tabla muestran cada posibilidad con una combinación de SI y "no".

Combinación de simetrías	Reflexión vertical (Sv)	Reflexión horizontal (Sh)	Reflexión c/ deslizamiento (G)	Rotación en 180º (R)	Clase de friso encontrado anteriormente
I	SI	SI	SI	SI	**7 pmm2**
II	SI	SI	SI	"no"	
III	SI	SI	"no"	SI	
IV	SI	SI	"no"	"no"	
V	SI	"no"	SI	SI	**5 pma2**
VI	SI	"no"	SI	"no"	
VII	SI	"no"	"no"	SI	
VIII	SI	"no"	"no"	"no"	**3 pm11**
IX	"no"	SI	SI	SI	
X	"no"	SI	SI	"no"	
XI	"no"	SI	"no"	SI	
XII	"no"	SI	"no"	"no"	**6 p1m1**
XIII	"no"	"no"	SI	SI	
XIV	"no"	"no"	SI	"no"	**2 p1a1**
XV	"no"	"no"	"no"	SI	**4 p112**
XVI	"no"	"no"	"no"	"no"	**1 p111**

Hasta el momento se ha mostrado la existencia de al menos siete clases de frisos, identificadas en la última columna de la tabla.

Teorema
Sólo hay siete clases de frisos esencialmente diferentes, en el plano.

Demostración
Una demostración del teorema se basa en mostrar que las únicas combinaciones que pueden ser simetrías de patrones de frisos son: I, V, VIII, XII, XIV, XV y XVI.

Demostración de que la combinación II no es posible:
Un patrón de este tipo tiene una reflexión horizontal Sh y una reflexión vertical Sv. Como la composición de dos isometrías que dejan invariante el motivo debe ser una simetría del mismo, se espera que Sv o Sh = R (rotación en 180º) sea una simetría del motivo. Pero, en la columna correspondiente a rotación en 180º se encuentra un "no". Luego, la combinación II no es posible.

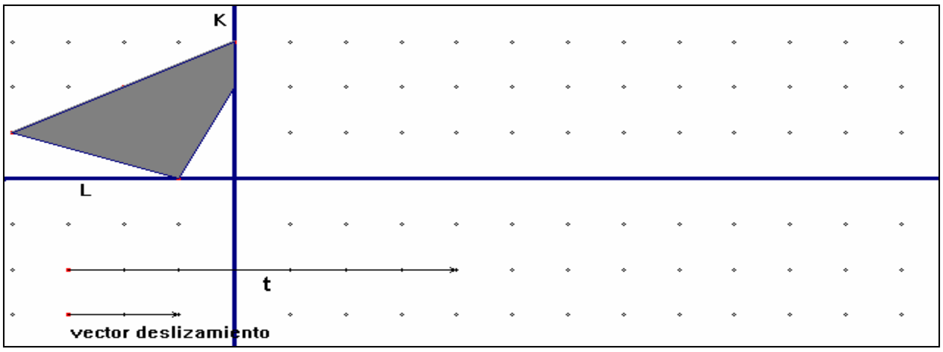
Argumentando de manera similar con las otras combinaciones, se demuestra que sólo existen siete combinaciones de simetrías que permiten generar patrones de frisos, lo que demuestra que existen únicamente siete grupos de frisos, denotados:

p111, p1a1, pm11, p112, pma2, p1m1, pmm2

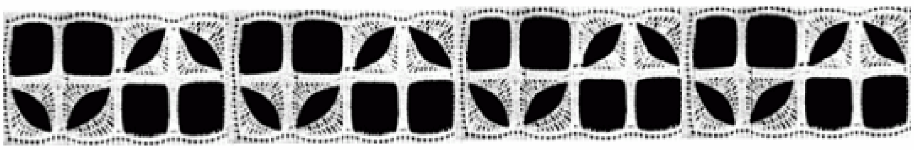
Nota. La primera demostración sobre la existencia de siete y solo siete grupos de frisos se debe a Paul Niggli (mineralogista suizo, 1888-1953) en el año 1926.

Actividades

1. Con el motivo base que presenta la figura, construir frisos de las siete clases. En la figura, la recta L es eje de reflexión horizontal, la recta K es eje de reflexión vertical y t es vector de la traslación.



2. Identificar las isometrías que dejan invariante la figura, y la clase de friso.



Conclusiones

Un estudio de los frisos constituye un trabajo interesante y particularmente entretenido, que permite afianzar conceptos matemáticos por la facilidad de cómo este tema puede relacionarse con muchos aspectos da vida cotidiana

El estudio de los frisos permite introducir de manera gradual, en los distintos niveles de enseñanza, las nociones de traslación, de generador, la composición de traslaciones, figura invariante por isometrías, propiedades de las isometrías, composición de isometrías, y la estructura de grupo.

Bibliografía

1. Alsina, C. Lecciones de Algebra y Geometría. Editorial Gustavo Pili, S.A. (1984).
2. Coxeter, Introduction *to Geometry*. John Willey & Sons, Inc. (1989).
3. Meyer, W. *Geometry and its applications*. Harcourt. Academic Press. (1979).
4. Encinas S**.** *Grupos ornamentales.* Sitio Web http://arqa208.maf.arq.uva.es/