Revista del Instituto de Matemática y Física. Año 10, N° 14 Noviembre 2007

Sobre la clasificación de las curvas cúbicas

Juana Contreras S.[1]
Claudio del Pino O.[2]

Instituto de Matemática y Física.
Universidad de Talca

Resumen

Un tema clásico en la enseñanza de la matemática, tanto a nivel medio como superior, lo constituye el estudio de las propiedades y clasificación de las cónicas (curvas del plano de grado 2). No sucede lo mismo con el natural paso siguiente, las curvas cúbicas (curvas del plano de grado 3). Hay razones de peso para esto. En realidad estas curvas se dejan estudiar mejor y completamente con las herramientas de la geometría algebraica. Sin embargo, estas materias están reservadas para cursos más avanzados de matemática. Conscientes de esta realidad este trabajo hace un intento en adentrarse en el mundo de las cúbicas, con herramientas elementales de matemática, tomando como base uno de los primeros estudios de estas curvas, realizado por Newton en los albores del nacimiento de la geometría analítica.

Introducción

El nacimiento de la geometría analítica en el siglo XVII, con los aportes finales de los trabajos de Fermat[3] (Francés, 1601-1665) y, principalmente, Descartes[4] (Francés, 1596-1650), que reunía la potencia del álgebra con la geometría, permitiendo identificar curvas con ecuaciones y viceversa, proporcionó un ambiente nuevo y poderoso para estudiar y re-estudiar algunos problemas geométricos importantes. Así por ejemplo [Be], Fermat y Descartes, observaron que las ecuaciones de primer grado $ax + by + c = 0$, correspondían a líneas rectas y que las ecuaciones de segundo grado

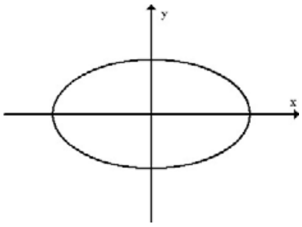
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxy + ex + fy + g = 0, \tag{1}$$

a las cónicas estudiadas por los Griegos. Fermat, en particular, probó que toda ecuación del tipo (1), vía rotaciones de ejes y traslaciones paralelas a los ejes, podía reducirse a un conjunto de

[1] e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[2] e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl
[3] "Introduction to Plane and Solid Loci", escrito en 1629 pero publicado el año 1679.
[4] "La Géométrie", que incorporó como apéndice de su trabajo filosófico "Discours de la Méthode" del año 1637.

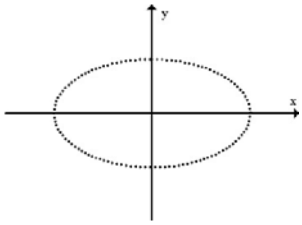
ecuaciones más simples. Más tarde Euler (Suizo, 1707-1783) demostró que estas ecuaciones eran justamente 9:

Elipse



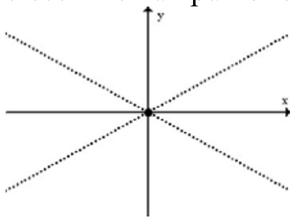
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Elipse imaginaria



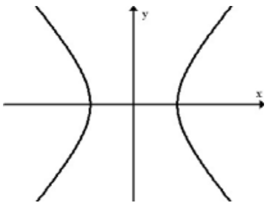
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$

Par de rectas complejas que se intersectan en un punto real.



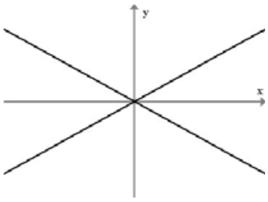
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$

Hipérbola



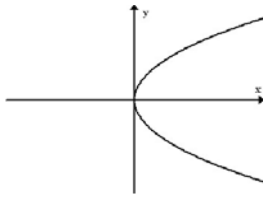
$x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$

Par de rectas que se intersectan



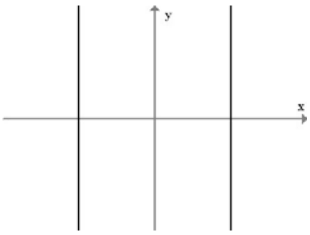
$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$

Parábola



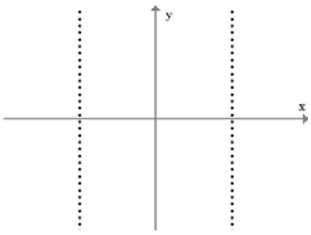
$y^2 - px = 0$

Par de rectas paralelas



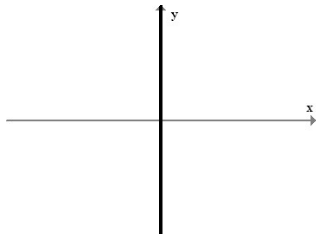
$x^2 - a^2 = 0$

Par de rectas complejas paralelas



$x^2 + a^2 = 0$

Par de rectas coincidentes



$x^2 = 0$

Donde a, b y p son todos distintos de 0. La identificación de las cónicas griegas con las ecuaciones de grado 2, fue uno de los primeros logros de la naciente geometría analítica.

Sobre curvas algebraicas y puntos especiales

En general, se llama curva algebraica real a toda curva correspondiente al gráfico de una ecuación polinomial del tipo $f(x, y) = 0$. El grado de f se llama grado de la curva. Así, por ejemplo, las cónicas son curvas de grado 2.

Recordemos [Va] que un punto P de una curva $f(x, y) = 0$ se dice s*imple* o *no singular* si algunas de las derivadas parciales de f, f_x o f_y no se anula en *P*. En caso contrario, el punto *P* se denomina *singular*. Es decir, en un punto singular *P*: $f_x(P) = f_y(P) = 0$. Un punto doble es un punto donde la curva se corta a sí misma. Si en un punto doble, la curva tiene dos tangentes distintas, el punto se denomina nodo; y si sus tangentes coinciden, el punto se llama cúspide. Un punto de inflexión P de una curva, es un punto de la curva que no es doble, en el cual la recta tangente tiene un contacto de orden dos con la curva.

Curvas cúbicas
Las curvas de grado 3, son denominadas curvas cúbicas. Análogo a (1), la ecuación general de una cúbica es:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + ky + l = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

con alguno de los 4 primeros coeficientes no nulo, que depende de 9 constantes independientes[1]. Luego, una cúbica queda determinada por medio de 9 condiciones independientes.

Con respecto a la clasificación de las cúbicas, Newton fue el primero en emprender esta tarea, que en la práctica resulta ostensiblemente más compleja que el caso de las cónicas. Su estudio lo empezó el año 1676, pero solo fue publicado el año 1704. Considerando transformaciones de coordenadas adecuadas, Newton clasifica las cúbicas en 4 tipos [Ta]:

Caso I: Cúbicas hiperbólicas, $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Caso II: Cúbica tridentes. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Caso III: Cúbicas parabólicas divergentes[2], $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Caso IV: Cúbicas parabólicas. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

La más famosa de las cúbicas del caso I, es la denominada Bruja de Agnesi (María Gaetana Agnesi, matemática italiana, 1718-1799), cuya ecuación general es $xy^2 = a^2(a - x)$, cuyo típico gráfico es

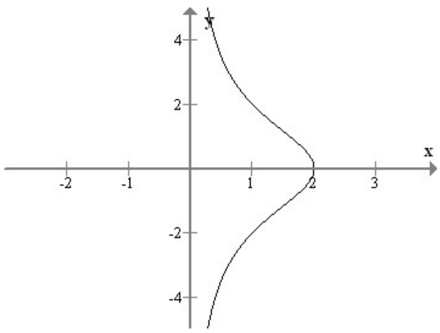


Gráfico de $xy^2 = 4(2 - x)$

Un gráfico típico de una cúbica tridente es

[1] Si bien, hay 10 parámetros, es claro que dividiendo por uno coeficiente no nulo, se obtienen 9 constantes independientes.
[2] Newton llamó a este tipo Parábola neilina, en honor al matemático Inglés William Neile (1637-1670), quien fue el primero en calcular la longitud de arco de una cúbica parabólica.

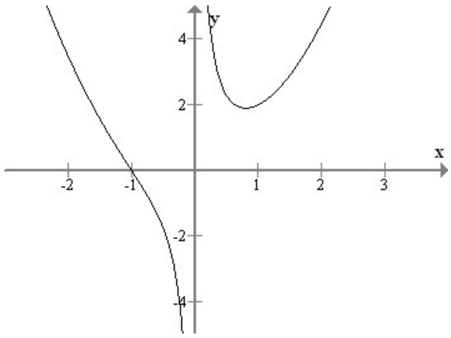


Gráfico de $y = x^2 + 1/x$

Ejemplos de cúbicas del caso III serán revisados más adelante. Las cúbicas del caso IV son más conocidos, pues corresponden las funciones cúbicas estudiadas en un curso estándar de cálculo.

De acuerdo al análisis de raíces de diferentes polinomios y relación de las cúbicas con sus asíntotas, Newton distingue diferentes *especies* de cúbicas de cada caso: 65 *especies* en el caso I, 1 en el caso II, 5 en el caso III y 1 en el caso IV. En total distingue 72 especies diferentes.

Newton fue un paso más allá. Postuló, que usando proyecciones entre planos, todas las cúbicas pueden ser obtenidas a partir de las cúbicas del tipo III. Esta aseveración fue posteriormente demostrada, en el año 1731, por Alexis Clairaut (Francés, 1713-1765). Clairaut consideró superficies cúbicas en el espacio del tipo

$$zy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 \qquad \textbf{(3)}$$

y demostró que toda curva cúbica es la intersección de un plano con una superficie cúbica del tipo (2).

Observación: Es claro que, luego de aplicar sucesivamente los cambios de coordenadas

$$(x, y) \to (x/\sqrt[3]{a}, y) \qquad \text{y} \qquad (x, y) \to (x - b/3, y)$$

a una ecuación cúbica del caso III, ésta se transforma en la cúbica, conocida como ecuación de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + px + q \qquad \textbf{(4)}$$

Una clasificación de las cúbicas

Siguiendo las ideas de Newton [Fe], las cúbicas (4) se clasifican de acuerdo a las raíces de la ecuación cúbica reducida

$$x^3 + px + q = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Como es sabido [Re], las posibles situaciones que presentan las raíces de (5) dependen de su discriminante $\Delta = 4p^3 + 27q^2$. Luego, se tienen 3 casos posibles:

Caso I. $\Delta > 0$. En este caso (5) tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.

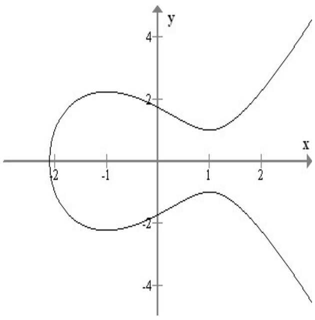
Caso II. $\Delta < 0$. En este caso (5) tiene 3 raíces reales distintas.

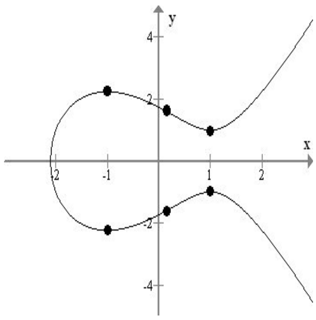
Caso III. $\Delta = 0$. En este caso (5) tiene 2 o 3 raíces reales.

Las cúbicas de los casos I y III reciben el nombre de cúbicas elípticas y como veremos ellas son curvas simples, es decir sin puntos singulares. Las cúbicas del caso II se llaman cúbicas racionales[1]. A continuación se analizan las curvas de Weierstrass, de acuerdo a los casos recién señalados. En cada caso se incorporan ejemplos particulares. Paras las curvas de los ejemplos, se analizan con herramientas del cálculo, algunas de sus propiedades: intersecciones con el *X*, tangentes verticales, puntos extremos y de inflexión.

Caso I: Estas cúbicas presentan solamente una rama. Veamos los siguientes ejemplos:

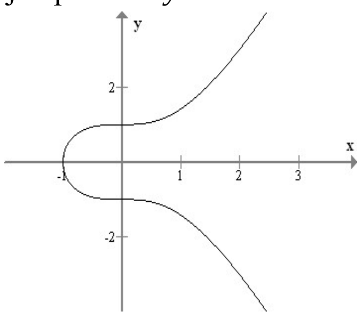
Ejemplo 1.1: $y^2 = x^3 - 3x + 3$

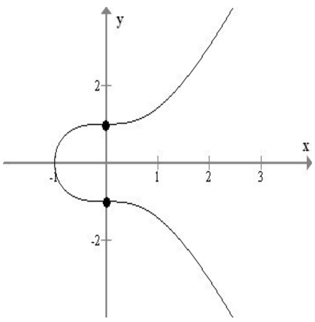




- 1 tangente vertical: $x \approx -2.1$
- 4 puntos extremos, con tangentes horizontales: $(1,\pm 1)$ y $\left(-1,\pm\sqrt{5}\right)$.
- 2 puntos de inflexión, $\approx (0.3,\pm 1.46)$.

Ejemplo 1.2: $y^2 = x^3 + 1$

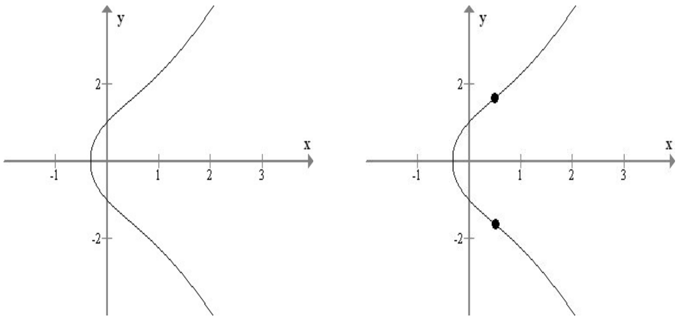




- 1 tangente vertical: $x = -1$.
- 2 puntos extremos, con tangentes horizontales: $(0,\pm 1)$.
- 2 puntos de inflexión: $(0,\pm 1)$.

Ejemplo 1.3: $y^2 = x^3 + 3x + 1$

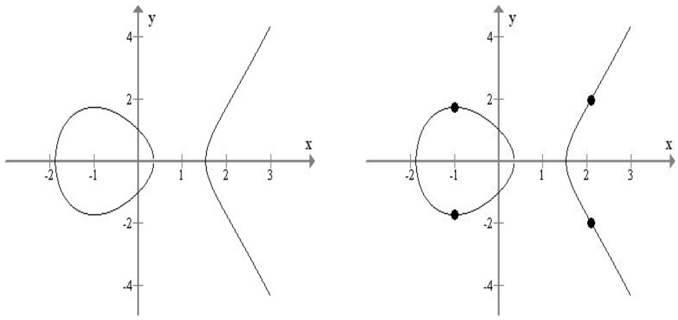
[1] Pues ellas admiten una parametrización por medio de funciones racionales.



- 1 tangente vertical: $x \approx 0.32$.
- 0 puntos extremos.
- 2 puntos de inflexión: $\approx (0.44, \pm 1.55)$.

Caso II. Estas cúbicas presentan un óvalo y una rama. Veamos el siguiente caso:

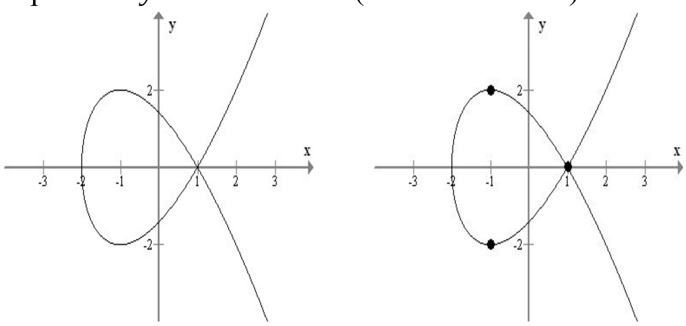
Ejemplo 2.1: $y^2 = x^3 - 3x + 1$



- 3 tangente vertical: $x \approx -1.88$, $x \approx 0.35$ y $x \approx 1.53$.
- 2 puntos extremos. $\left(-1, \pm\sqrt{3}\right)$.
- 2 puntos de inflexión: $\approx (2.19, \pm 2.22)$.

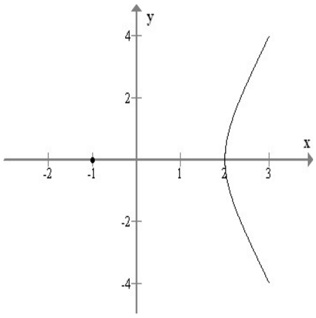
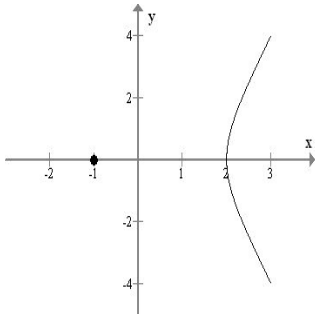
Caso III. En este caso se presentan 3 situaciones diferentes, que dan origen a 3 clases de cúbicas: las cúbicas crunodales con un punto doble, las cúbicas acnodales con un punto aislado y las cúbicas cuspidales con un punto, justamente, cuspidal.

Ejemplo 3.1: $y^2 = x^3 - 3x + 2$ (Cúbica crunodal).



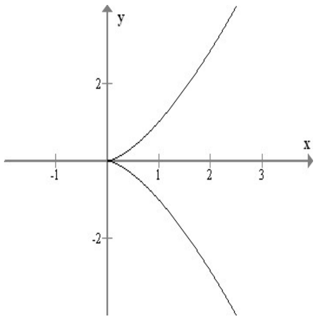
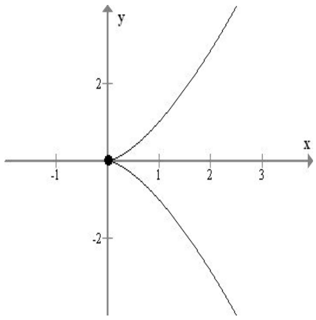
- 1 tangente vertical: $x = -2$.
- 2 puntos extremos. $\left(-1, \pm 2\right)$.
- 0 puntos de inflexión.
- 1 punto doble: $(1,0)$. Sus dos tangentes en este puntos son $y = \pm\sqrt{3}(x-1)$.

Ejemplo 3.2: $y^2 = x^3 - 3x - 2$ (Cúbica acnodal).

- 1 tangente vertical: $x = 2$.
- 0 puntos extremos.
- 0 puntos de inflexión.
- 1 punto aislado: $(-1,0)$.

Ejemplo 3.3: $y^2 = x^3$ (Cúbica cuspidal).

- 0 tangente vertical.
- 0 puntos extremos.
- 0 puntos de inflexión.
- 1 punto cuspidal: $(0,0)$. Su única tangente en este punto es $y = 0$.

En los casos precedentes se pueden observar los típicos gráficos de las ecuaciones cúbicas. Como se ha podido constatar el estudio y clasificación de las cúbicas supera el grado de dificultad de las cónicas. También se puede observar que en las cúbicas aparecen puntos especiales (singulares), como los puntos cuspidales, dobles y aislados, que ninguna de las cónicas presenta. El caso de las cuárticas, a su vez, el trabajo para su clasificación es mucho más complejo.

Bibliografía.

[Ba] Basset, A. B. *An elementary treatise on cubic and quartic curves*. Cambridge Deighton Bell and Co. London George Bell and Sons. 1901. Disponible desde The University of Michigan Historical Mathematics Collection. http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/

[Fe] Ferreol, R. *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*. http://www.mathcurve.com/index.htm

[Be] Bell, John. *The art of the intelligible. An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*. Editorial Kluwer. 1999.

[Re] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C., *Análisis Matemático*, Volumen 1, Editorial Kapeluz, 1963.

[St] Steve, J. W. *A Gallery of Cubic Plane Curves*. http://staff.jccc.edu/swilson/planecurves/cubics.htm

[Ta] Talbot, C. R. M., Isaac. *Sir Isaac Newton´s Enumeration of lines of third order, generations of curves by shadows, organic description of curves and constructions of equations by curves*. Traducido del Latín. H. G. Bohm, York Street, Convent Garden.

Londres. 1860

[Va] Vainsencher, Israel. *Introdução as Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro. IMPA. 2005.

.