El más bello Teorema[1]

Alberto Campos

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

David Wells, matemático inglés, hizo [Wells 1988] la propuesta de escoger el más bello teorema entre una lista de 24, mediante asignación de un número entre 0 y 10.

El resultado apareció 2 años más tarde [Wells 1990]. Hubo 76 respuestas.

Alguien asignó cero a cada teorema con el siguiente criterio: "La matemática es un instrumento. El arte tiene belleza". Tal punto de vista es muy discutible a partir del mismo. Se dice que lo que es digno de hacerse, es digno de hacerse bien. El arte, en uno de sus aspectos, consiste en mezclar lo agradable a lo útil.

Quizá sea menos discutible la actitud de quien asignó 10 a cada teorema.

De las 68 respuestas aceptadas como válidas por Wells, resultó la clasificación que se verá más adelante.

Antes precisa debatir los criterios invocados por los matemáticos. El mismo Wells en la presentación de los resultados agrupa sus comentarios en 10 temas. Subrayo algunos de ellos.

Según alguna respuesta, *los teoremas no son usualmente bellos; son las ideas y las demostraciones las que tienen atractivo*: importante, bello, son calificativos diferentes.

Según otra respuesta un teorema (quizás se refiera solamente al enunciado) no puede ser aislado de las hipótesis respecto de las cuales es derivado. Lo cual es natural: cuando un matemático se refiere a un teorema, tiene en cuenta las circunstancias del teorema; en particular, condiciones de validez, conceptos involucrados, alcance del enunciado. No tener en cuenta tales circunstancias es como no tener teorema.

En la decisión de los matemáticos ha podido influir el hecho de que algunos enunciados son más mencionados que otros: Sería el caso para enunciados como los siguientes:

- $e^{i\pi} + 1 = 0$
- El número de los números primos es infinito
- Hay 5 poliedros regulares
- No hay número racional con cuadrado 2
- π es trascendente

La mayor parte de las respuestas se apoyan en 2 características: sencillez y brevedad.

[1] Publicado en MEMORIAS VII ENCUENTRO DE GEOMETRIA Y SUS APLICACIONES.

Sencillez que no se confunde con facilidad. Hubo teoremas mal calificados por ser fáciles pero también hubo uno devaluado por ser muy difícil.

"Un teorema bello ha de ser sorprendente y profundo. Ha de proveer una nueva visión de la matemática". De algún corresponsal toma Wells la sugerencia de Atiyah según la cual "la elegancia es poco más o menos sinónimo de sencillez".

No cita la exclamación de Einstein! "Idea genial! Tan sencilla".

Pero cita de él esta otra: "Lo más bello que se puede experimentar es lo misterioso. Es la fuente de todo arte y de toda ciencia".

Wells resta importancia a estos pareceres: ¿Qué pasa cuando la novedad desaparece y cuando el misterio es comprendido?

Sin embargo cita, como un teorema que sorprende siempre, el de la infinitud de los números primos.

Cabe apuntar que en Platón y en Aristóteles hay pasajes que destacan el hecho de que maravillarse de algo es ponerse en camino para formular una buena pregunta.

Algún corresponsal hace notar la preferencia de Wells por resultados de la teoría de números; contrapuestamente otro respondedor escribe que Wells hubiera podido proponer más resultados de Ramanujan, lo que es decir, más de la teoría de números.

Son numerosos los matemáticos que se impulsan desde los enunciados sencillos y profundos de la teoría de números hacia la concepción platónica de la matemática.

A más de la sencillez y la brevedad, la generalidad en el enunciado o en el método de demostración también es justificación aducida: "Me gusta la matemática porque me gusta la generalidad".

Y no faltó quien arguyera con base en las adquisiciones negativas: "Siento que la negatividad de un enunciado hace más difícil lograr la belleza".

Destaco una de las conclusiones de Wells: es negativa. La idea de que los matemáticos están de acuerdo en su enjuiciamiento estético de su ciencia es, por lo menos, demasiado simplista. Efectivamente, no se advierte ningún denominador común.

Antes de continuar en el recuento de las opiniones de algunos matemáticos acerca de lo estético en matemática quiero transcribir el párrafo final de Wells.

> *Estoy seguro de que la matemática sólo puede ser comprendida a fondo en el contexto de la vida humana. La belleza en matemática ha de ser incorporada en toda epistemología de la matemática que se haga apropiadamente. Filosofías de la matemática que ignoran la belleza serán forzosamente defectuosas e incapaces de interpretar efectivamente las actividades de los matemáticos.*

Alguno de los matemáticos que respondieron a la encuesta sugirió que tan verdadero es uno como otro teorema, pero que la belleza es un criterio humano. Lo cual es aceptable en el sentido de que la verdad matemática se establece mediante reglas lógicas. La objetividad matemática consiste en la aplicación sistemática de tales reglas estrictas. Mientras que como otro matemático escribió a Wells "la belleza, incluso en matemática está condicionada por contextos históricos y culturales".

Vale decir, que la estética no tiene reglas como la sintaxis de la lógica, verificables, en principio, por quien lo desee. La belleza es una apreciación más bien personal difícilmente constatable por criterios explícitamente formulados.

Dejando de lado a los lectores de The Mathematical Intelligencer puede acudirse a otras fuentes en busca de asesoría acerca de la belleza en matemática. Moritz presenta la matemática desde diversos aspectos, uno de ellos, el de la matemática como una de las bellas artes. Cita, 728, una opinión con pretensiones, de Hermann Hankel, 1884, según la cual la elegancia de la forma ha llegado a ser un criterio de validez o de invalidez para una proposición. A esta convicción puede oponerse la traída a cuento por un reseñador en el B.A.M.S., 1982, según la cual la elegancia es competencia de sastres y zapateros; y se asegura allí mismo, sin precisar la fuente, que, poco más o menos, tal era el convencimiento de Boltzmann, Lichtenstein, Steinhaus, Marc Kac.

No sobra recordar el dictamen de Aristóteles [Metafísica. XIII. 3]: "*Incurren en una falsa afirmación quienes aseveran que la matemática no se pronuncia acerca de lo bello ni de lo bueno. De ello es de lo que trata y acerca de lo cual forja demostraciones en el más estricto sentido de la palabra. Los aspectos más salientes de lo bello son el orden, la simetría y lo que es definido; y ello es lo que la matemática hace manifiesto en grado sumo*".

Entre las declaraciones aludidas ninguna ha sido la de matemáticos destacados.

Por ejemplo es de notar la manera de pensar del matemático inglés Hardy [Hardy. p.86] creador en teoría de números:

> *Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que sucede con las de un pintor o un poeta, deben poseer belleza; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armónico. La belleza es la primera piedra de toque; en el mundo no hay lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético*.

Otro pasaje de Hardy [p. 131] es éste: "*Los universos imaginarios son siempre mucho más bellos que este universo 'real' estúpidamente construido; y la mayor parte de las más sutiles y brillantes creaciones emergidas de la imaginación de un matemático aplicado deben ser repudiadas, desde el mismo momento de su creación, por la brutal pero suficientemente válida razón de que no se adaptan a los hechos*".

Wells cita una carta del matemático alemán Hermann Weyl en la que escribe: *Mi obra trató siempre de unir la verdad con lo hermoso y cuando tenía que escoger entre lo uno y lo otro escogía usualmente lo hermoso*.

El matemático historiador Morris Kline escribió: “Mucha investigación para nuevas pruebas de teoremas ya correctamente establecidos es emprendida simplemente porque las pruebas existentes no tienen atractivo estético”. (Citado por Wells. 1988).

Quiero cerrar esta sección en la que se han tenido en cuenta primero, algunas de las opiniones manifestadas porque quienes respondieron a The Mathematical Intelligencer, luego, las de algunos matemáticos conocidos, con la mención de dos notables pasajes de Poincaré, uno de los mayores creadores de matemática de todos los tiempos.

He aquí el primer pasaje.

> *Sin este lenguaje que es la matemática, la mayor parte de las íntimas analogías de las cosas habrían sido siempre desconocidas por nosotros; habríamos ignorado para siempre la armonía interna del mundo, única realidad objetiva verdadera...la sola verdad a que podemos acceder. Si se añade que la armonía universal es la fuente de toda belleza, se entenderá qué precio ha de atribuirse al lento y difícil progreso que poco a poco nos capacita para conocerla mejor*.
>
> (Poincaré, citado por Moritz 1208).

Si en el anterior pasaje hay una especie de pensamiento cósmico, en el siguiente Poincaré describe el sentimiento estético del matemático con base en su experiencia de profundo investigador.

> *Los matemáticos conceden gran importancia a la elegancia de sus métodos y resultados. Esto no es mero diletantismo. Y qué es, en realidad, lo que da el sentimiento de elegancia en una solución, en una demostración?. Es la armonía de las diversas partes, su simetría, el equilibrio afortunado; en una palabra, es todo lo que introduce orden, todo lo que implica unidad, todo lo que hace posible ver claramente y aprehender a la vez el conjunto y los detalles. Precisamente lo que aporta grandes resultados; de hecho, cuanto más netamente es intuido un agregado como de un solo golpe de vista, tanto mejor son percibidas las analogías con objetos cercanos y tanto más vislumbrables son posibles generalizaciones*.
>
> *La elegancia puede producir la impresión de lo no antes visto debido al inesperado encuentro de objetos que no estábamos acostumbrados a ver reunidos; lo cual es, de nuevo, provechoso puesto que despierta en el investigador afinidades no sospechadas antes*.
>
> *Es provechoso incluso cuando resulta meramente del contraste entre la sencillez de los medios y la complejidad del problema; hace reflexionar acerca de la razón para el contraste e induce con frecuencia a darse cuenta de que el azar no es la explicación, la cual ha de indagarse en alguna relación imprevista. En una palabra, la sensación de elegancia matemática no es más que la satisfacción debida a alguna adaptación de la solución a necesidades de la inteligencia y es precisamente por tal adaptación por la que tal solución sirve como instrumento.*
>
> (Poincaré. Citado por Moritz 640).

¿Qué dejan en claro los diversos párrafos anteriores?. Más como hipótesis de trabajo que como intento de síntesis, selecciono cinco calificativos con el fin de enfocar con precisión los teoremas de la encuesta.
Son ellos:

- Aplicable
- General
- Profundo
- Sencillo
- Sorprendente

No voy a describirlos, sino que los utilizaré cuando me parezca que convengan a algún teorema.

Me propongo hacer algunos comentarios esclarecedores acerca de 9 de los 10 primeros teoremas clasificados. De los otros 15 voy a dar solamente su enunciado. Desafortunadamente, Wells no entregó bibliografía específica para ninguno de los 24 teoremas.

Los 24 teoremas según su orden de clasificación y con la nota promedio:

(1)	$e^{i\pi}+1=0$	7.7
(2)	Fórmula de Euler para los poliedros: V - A + C = 2	7.5
(3)	El número de los primos es infinito	7.5
(4)	Hay 5 poliedros regulares	7.0
(5)	$1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\pi^2/6$	7.0
(6)	Una aplicación continua del disco unidad cerrado sobre sí mismo tiene un punto fijo	6.8
(7)	No hay número racional cuyo cuadrado sea 2	6.5
(8)	π es trascendente	6.5
(9)	Todo mapa plano puede ser dibujado con 4 colores	6.2
(10)	Todo primo de la forma 4n+1 es suma de 2 cuadrados de una sola manera	6.0
(11)	El orden de un subgrupo divide al orden del grupo	5.3
(12)	Toda matriz cuadrada satisface su ecuación característica	5.2
(13)	Un icosaedro regular inscrito en un octoedro regular divide las aristas según la razón áurea	5.0
(14)	$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}-\cdots=\frac{\pi-3}{4}$	4.8

(15)	Si los puntos del plano son coloreados en rojo, amarillo, o azul, entonces hay un par de puntos del mismo color cuya distancia mutua es la unidad	4.7
(16)	El número de particiones de un natural en números impares es igual al número de particiones en naturales diferentes	4.7
(17)	Todo número mayor que 77 se puede descomponer en suma de naturales tales que la suma de sus recíprocos es 1.	4.7
(18)	El número de representaciones de un impar como suma de 4 cuadrados es 8 veces la suma de sus divisores; de un par, 24 veces la suma de sus divisores impares.	4.7
(19)	No hay triángulo equilátero cuyos vértices sean puntos de una red.	4.7
(20)	En cualquier reunión social, hay un par de personas con el mismo número de amigos presentes	4.7
(21)	Escribir en una segunda línea, las partes enteras de los múltiplos de la aproximación decimal para √2; en una primera línea los naturales que no aparecen en la secuencia escrita 3 6 10 13 17 20 23 27 30 ... 1 2 4 5 7 8 9 11 12 ... La diferencia en la columna n es igual a 2n.	4.2
(22)	El problema de las palabras para los grupos es insoluble.	4.1
(23)	El área máxima de un cuadrilátero de lados a, b, c, d es $\left[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\right]^{1/2}$ donde s es la mitad del perímetro.	3.9
(24)	$\dfrac{5\left[(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\cdots\right]^5}{\left[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots\right]^6} = p(4)+p(9)x+p(14)x^2+\cdots$ Donde $p(n)$ es el número de particiones de n.	3.9

A propósito de la relación (1)

Kline (408-409) describe la secuencia investigativa que conducirá al resultado del cual es una simple ocurrencia individual la fórmula favorecida con el primer puesto.

Entre 1707 y 1722, Abraham De Moivre (1667-1754), protestante francés exiliado en Londres luego de la revocación del Edicto de Nantes, investiga ciertas relaciones, que, con la contribución de otros matemáticos, principalmente Euler, se transformarán en lo que se suele llamar el teorema o también la fórmula de De Moivre.

En 1714, Roger Cotes (1682-1716) mostró que (i es la raíz cuadrada de -1)

$$it = \log_e(\cos t + i \sin t)$$

El 1740, Euler escribe a John Bermoulli que, dado que

$$y = 2 \cos x$$
$$y = e^{ix} + e^{-ix}$$

son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y”+y = 0, han de ser iguales.

En 1743, Euler (supo de Cotes solamente en 1748) estableció que

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$
$$\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

De donde

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Para el par de números reales x = 0, y = π se obtiene la relación $e^{i\pi} + 1 = 0$. Lo que se llama teorema o fórmula de De Moivre es la relación

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$$

A propósito de la relación (2)

Es un teorema importantísimo, en cuya deducción intervienen principalmente:

◊ René Descartes (1596-1650)
◊ Leonhard Euler (1707-1783)
◊ Agustin Louis Cauchy (1789-1857)
◊ Henri Poincaré (1854-1912)
◊ James Alexander (1888-1971)

Descartes, 1639, llegó a resultados, no publicados, a partir de los cuales podría derivarse la que Wells llama fórmula de Euler.

El manuscrito fue hallado y copiado por Leibniz, 1675; esta copia fue encontrada en 1860.

Euler, 1752, se ocupa en el tema de tal modo que posteriormente se dio su nombre a la fórmula, aunque, al parecer la argumentación de Euler no ha podido ser entendida del todo; es curioso, por ejemplo, que no precise el tipo de poliedros para los cuales vale.

La demostración, corriente actualmente, se basa en la que dio Cauchy, 1813. Elon Lages Lima la califica de elegante.

Un poliedro satisface las condiciones de Cauchy, si y solo si es homeomorfo a una esfera, es decir, si puede aplicarse biyectiva y continuamente el poliedro a la esfera, la esfera al poliedro.

Poincaré, 1893, con base en una teoría, la homología, parte central de la topología algebraica, creada por el mismo Poincaré, extiende el teorema a *n* dimensiones.

Aparecen ciertos grupos, llamados de homología, cuya invariación topológica (es decir, mediante transformaciones como las que se pueden hacer sobre una lámina de caucho: estirar o encoger sin rasgar) demostró Alexander, 1915.

$V-A+C = 2$ donde V es el número de vértices, A el número de aristas, C el número de caras de un poliedro, puede llamarse la fórmula de Euler.

$V-A+C = 2-2g$ es la característica de Euler-Poincaré, donde g es un número que indica otra propiedad, el género de una superficie. Cuando $g = 0$ (esfera) se obtiene la fórmula de Euler.

Es un teorema importantísimo, se dijo un poco antes. No es una expresión retórica o de común exageración. Es una aseveración argumentable mediante los cinco calificativos consignados antes que este es *el más bello de los teoremas* en la lista de los 24 dados.

En cuanto al primero, aplicable, baste decir que la determinación del número de poliedros regulares (enunciado (4)) puede lograrse a partir de $V-A+C = 2$. El problema de los cuatro colores no es que pueda intentarse mediante la relación euleriana, sino que cuanto se sabe hasta ahora del problema pasa por dicha relación. De seguro, la relación es igualmente utilizable en los problemas de cubrimiento de áreas.

Como mejor puede apreciarse la generalidad del enunciado es por comparación con el cuadro adjunto de cinco geometrías, donde la más general figura en la primera línea.
Cuadro sinóptico de cinco geometrías

Espacio	**Grupo**	**Geometría**	**Invariante Fundamental**
Topológico	Homeomorfismos	Topológica	Abierto
Proyectivo	Proyectividades	Proyectiva	Alineación
Afín	Afinidades	Afín	Paralelismo
Afín euclidiano	Similitudes	Símil	Angulo (forma)
Afín euclidiano	Isometrías	Isométrica	Distancia (tamaño)

La profundidad del enunciado es principalmente apreciable cuando se piensa que es caso particular del teorema mucho más general llamado de la característica de Euler-Poincaré derivable dentro de una disciplina matemática llamada topología diferencial

Se ve la sencillez del enunciado por el hecho de que para entenderlo basta contar y hacer adiciones y substracciones, con base en un diseño.

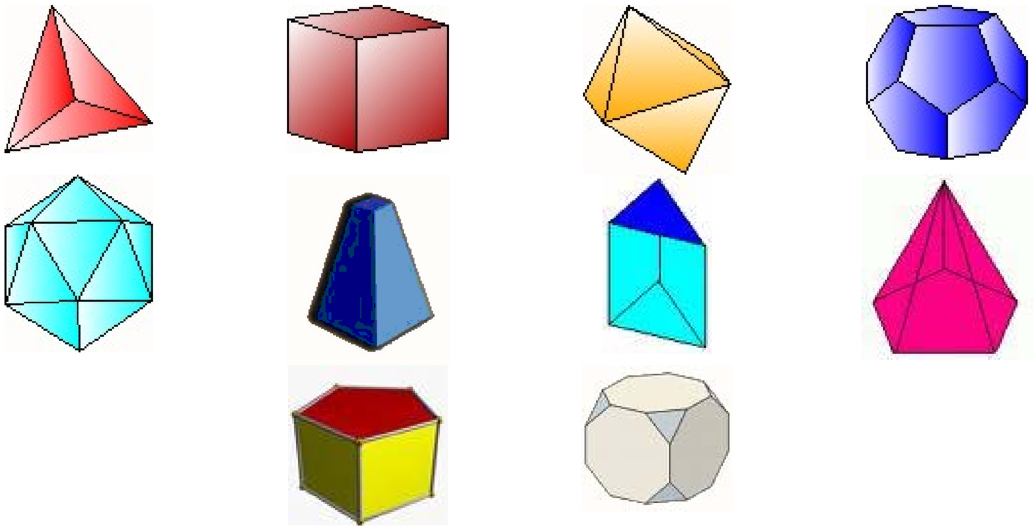
El resultado es sorprendente o inesperado si se echa de ver que Platón anduvo buscando relaciones entre los triángulos que componen los sólidos que llevan su nombre y que tal relación no se le ocurrió; ni se le ocurrió a quienes estudiaron posteriormente los diálogos platónicos, especialmente Timeo, con fuerte inclinación contemplativa; ni pensó en ella Kepler, quien tanto trasegó con los cuerpos platónicos.

Es más, el pleno establecimiento del enunciado se logra ya iniciado el siglo XX.

La relación es intuitivamente verificable según las siguientes ilustraciones.

	V	**A**	**C**	**V-A+C**
Tetraedro	4	6	4	2
Hexaedro o cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2
Pirámide cuadrada	5	8	5	2
Prisma triangular	6	9	5	2
Pirámide pentagonal	6	10	6	2
Prisma pentagonal	6	12	8	2
Hexaedro truncado	10	15	7	2
Torre[2]	9	16	9	2
n-prisma[3]	2n	3n	n+2	2
n-pirámide[4]	n+1	2n	n+1	2
n-doble pirámide[5]	n+2	3n	2n	2

[2] Torre es una pirámide sobre un cubo.
[3] n-prisma es un prisma cuya base es un polígono de n aristas.
[4] n-pirámide es una pirámide cuya base es un polígono de n aristas.
[5] n-doble pirámide: está formada por 2n-pirámides que están sobre aristas opuestas de una base común.



A propósito de la relación (3)

Elementos IX 20: Hay más números primos que cualquier multitud asignada de números primos.

Actualmente se dice que el conjunto de los números primos es infinito.

Demostración (casi la de Euclides)
Sean: a, b, c...k los números primos dichos. Hágase el producto y añádase 1.
O abc...k+1 es primo, o no es primo.
Si es primo, hay entonces un primo más que lo que se había dicho.
Si no es primo, entonces ha de ser divisible por algún primo (VII 31). Sea p. p no es ninguno de los dados a, b, c,...k. Si así fuera, entonces dividiría el producto. Pero no divide al producto, por el resto 1. Pero divide a abc...k+1. Por lo tanto divide al residuo que es la unidad. Lo cual es absurdo. Por lo tanto, p no es uno de los primos de la lista de todos los primos y p es primo. Por lo consiguiente, en ambos casos hay un primo más de lo que se había dicho.
Contra la hipótesis.
Así que hay más primos que cualquier conjunto asignado. ■

A propósito de la relación (4)

Elementos (Euclides). Teorema XIII 18.
Ninguna otra figura, fuera de estas cinco, puede ser construida, de manera que esté contenida por figuras equiláteras, equiangulares, iguales entre sí porque un ángulo sólido no puede ser construido con dos triángulos ni con dos planos.

Con 3 triángulos se construye el ángulo del tetraedro, con 4 el ángulo del octaedro, con 5 el ángulo del icosaedro.

Un ángulo sólido no puede ser formado por 6 triángulos equiláteros y equiángulos, puestos juntos en un punto, ya que siendo el ángulo del triángulo equilátero dos tercios de un ángulo recto, los 6 serían iguales a 4 ángulos rectos: lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es contenido por ángulos menores que 4 ángulos rectos (X1 21).

Por la misma razón, un ángulo sólido no puede ser construido con más de 6 triángulos. El ángulo del cubo es contenido por 3 cuadrados, pero es imposible que un ángulo sólido sea construido con 4 cuadrados, porque serían 4 ángulos rectos.

El ángulo del dodecaedro es contenido por 3 pentágonos equiláteros y equiángulos; pero, es imposible que un ángulo sólido sea contenido por 4 pentágonos dado que, siendo el ángulo del pentágono regular un recto y un octavo, los 4 ángulos serían mayores que 4 ángulos rectos. Imposible.

Ni puede un ángulo sólido estar contenido por otras figuras poligonales por la misma razón de absurdidad. ■

Mediante geometría cartesiana se logra igualmente la determinación de los 5 poliedros regulares, a condición de conocer la relación de Euler $V-A+C = 2$, donde V es el número de vértices, A el de aristas, C el de caras del respectivo poliedro regular.

En efecto:
Si L es el número de lados de cada cara puesto que cada lado es común a dos caras: $LC = 2A$.
Si m es el número de lados que concurren en cada vértice puesto que cada lado limita con dos vértices: $mV = 2A$
Por lo tanto

$$2 = V - A + C = 2A/m - A + 2A/L = 2A\ [1/m-1/2+1/L]$$

De donde

$$1/A = 1/L+1/m-1/2$$

Ahora bien:
Un polígono tiene al menos 3 lados, así que $L \geq 3$.

Un ángulo poliedro tiene al menos 3 lados que concurren en un vértice $m \geq 3$.

Si L y m fueran ambos iguales a 4, sería $1/A =0$. Imposible. A ha de ser un natural.
Por lo tanto, L y m no pueden ser al mismo tiempo mayores que 3.

Si $L = 3$ y $m = 3$ se obtiene el tetraedro.
Si $L = 3$ y $m = 4$ se obtiene el octaedro.
Si $L = 3$ y $m = 5$ se obtiene el icosaedro.

No hay más posibilidades para m.

Si $m = 3$ y $L = 4$ se obtiene el cubo o hexaedro
Si $m = 3$ y $L = 5$ se obtiene el dodecaedro

No hay más posibilidades para l.

Estos 5 son todos los casos posibles.

Por lo tanto, en 3 dimensiones solo hay 5 poliedros regulares.
Es de anotar la gradación

En dos dimensiones hay infinitos polígonos regulares.
En tres dimensiones hay 5 poliedros regulares.
En 4 dimensiones hay 6 hiper poliedros regulares.
En cada espacio de n>4 dimensiones hay 3 hiper poliedros regulares.

(Courant - Robbins pp. 242 - 246).

A propósito de la relación (6)

Si la transformada de un punto x es f(x), entonces, un *punto fijo* es aquel para el cual se cumple que f(x) = x.
Brouwer, 1911, estableció que toda transformación continua de una esfera 2n-dimensional en sí misma posee por lo menos un punto fijo. En particular: Una transformación continua de un disco circular sobre sí mismo posee por lo menos un punto fijo.
1922. Birkhoff y Kellog generalizaron el teorema a espacios infinito dimensionales de funciones.
1930 y 1934. Schauder, y, Leray aplicaron el teorema para probar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Al rotar una vasija que contenga líquido, sin que haya translación para que la aplicación sea del líquido sobre sí mismo, se tendrá una partícula de líquido, por lo menos, que quedará en el punto inicial.

(Kline pp. 1178 - 1179).

A propósito de la relación (7)

Es de anotar que los números han sido creados progresivamente.

Primitivos seres humanos:	1, 2, 3...
Griegos:	racionales, √2,. π, raíces en general.
Babilonios e indios:	cero
Siglo XVII :	*e*
Siglo XVIII :	complejos
Siglo XIX :	algebraicos, trascendentes.

El historiador de la matemática y editor inglés de los Elementos, Thomas Heath [The thirteen books of the Elements. Volumen I. Books I y II. Reprint 1956. Dover. 432 pp.] escribe lo que sigue, muy digno de tener en cuenta:

Vogt señala que se necesita superar 3 etapas antes de que sea descubierta realmente la irracionalidad de la diagonal de un cuadrado:

1. Reconocer como inexactos cualesquiera valores encontrados por medición directa o por cálculos basados en ella.
2. Llegar a la convicción de que es imposible obtener una expresión aritmética exacta del valor.
3. Probar tal imposibilidad

Así por ejemplo, no había llegado a tener conciencia de tal irracionalidad una fuente india que da como √2 la aproximación 1+1/3+1/(3·4) −1/(3·4·34).
En cambio, eran conscientes de tal irracionalidad los pitagóricos, quienes no solo idearon diversos algoritmos que ponen de manifiesto que han pasado por los niveles 1 y 2 de Vogt, sino que forjaron (paso 3 de Vogt) una célebre demostración por reducción al absurdo para establecer que √2 no es un racional. Si así fuera se tendría b/a = √2 con a, b primos entre sí. En efecto sería:

1. $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ (teorema de Pitágoras)
2. $2a^2$ es par
3. b es par (1,2)
4. Sea $b = 2c$ (3)
5. a es impar (a, b son primos entre sí)
6. $b^2=(2c)^2=4c^2=2a^2$ (1,4)
7. $2c^2=a^2$ (6)
8. $2c^2$ es par
9. a es par (7,8)
10. a es simultáneamente par e impar (5,9) lo cual no puede ser. ■

De ahí, el comentario de Aristóteles (Primeros Analíticos I 23. 41 a 26):

Se demuestra que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con los lados, mostrando que si se supone que es conmensurable, los números pares serán lo mismo que los números impares.

Hardy, especialista en teoría de números, muestra con el siguiente argumento que los irracionales interesan solamente a la matemática como tal, no a las aplicaciones.

Si pensamos en el teorema de Pitágoras, es fácil darse cuenta de que para un ingeniero los números irracionales no poseen la más mínima importancia, pues él se halla interesado en cantidades aproximadas y toda aproximación es racional.

A propósito de la relación (8)

Un número racional, x = p/q, satisface a la ecuación de primer grado qx-p = 0. Número algebraico es un número real o complejo, raíz de una ecuación de coeficientes enteros.

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

$\sqrt{2}$ es un número algebraico de grado 2 porque es raíz de $x^2 - 2 = 0$, y no es raíz de ecuación de grado 1.

$\sqrt[3]{2}$ es un número algebraico de grado 3 porque es raíz de $x^3 - 2 = 0$, y no es raíz de ecuación de grado inferior.

Toda raíz de una ecuación con coeficientes enteros de grados 3, 4, 5... es un número algebraico, sea o no expresable mediante radicales.

Número algebraico es una generalización de número racional, caso en que el grado es 1.

El conjunto de los números algebraicos es numerable.
El conjunto de los números reales no es numerable.
Los números algebraicos son un subconjunto del de los reales.

Puede decirse que π es el área de un círculo de radio 1, o la longitud de una circunferencia de radio 1/2.

Desde hace más de 4.000 años se sabe que el número de veces en que el diámetro está contenido en la circunferencia, es siempre el mismo, no importa cuál sea el tamaño de la circunferencia.

Es decir, si el diámetro mide un centímetro, un metro, un kilómetro, entonces la circunferencia mediría respectivamente π centímetros, π metros, π kilómetros.

Todavía de otra manera: Para dos circunferencias, una de longitud C y diámetro D, otra de longitud C' y diámetro D', se cumple que C/D = C'/D'.

Un matemático inglés, William Jones, había propuesto designar por la letra griega π, la relación de la longitud de la circunferencia a la del diámetro; la designación solo se impuso, desde 1737, cuando la propuso Euler. Los babilonios habían logrado mostrar que

$$25/8 < \pi < 22/7$$

En el papiro Rhind el valor para π es $\pi = 256/81 \approx 3{,}16$.

Arquímedes obtuvo 3,1416; mostró que $3\frac{10}{7} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

En 1873, el inglés William Shanks calculó a π con 707 decimales.
En 1947, alguien mostró que el cálculo de Shanks estaba errado desde la cifra 527.

El cálculo manual fue sustituido por el de con ayudas de máquinas. Primero se obtuvieron 808 decimales.

En 1967, en Francia, una computadora en 28 horas, 10 minutos arrojó 500.000 decimales (Un libro aburrido, comentó algún lector benévolo).

En 1984, en Estados Unidos, se obtuvieron 10.013.395 decimales exactos.

¿Qué interés pueden tener tantas cifras decimales? De hecho, ninguno. O como dice el profesor brasileño Elon Lages Lima, esos cálculos existen por el mismo motivo por el que existen los Records Guinness.

Para cálculos técnicos, las condiciones del problema prescriben la aproximación permisible. Y tan equivocado sería emplear pocas como emplear muchas cifras decimales al arbitrio. Pueden ser tales cálculos una experiencia interesante desde el punto de vista teórico en cuanto pueden contribuir a afianzar la intuición de los números reales.

Nada tan convincente para llegar a la convicción de que es imposible obtener una expresión aritmética exacta como constatar por cálculo efectivo que no aparece decimal periódico alguno en tan elevado número de cifras.

Euler llamó trascendentes a los números no algebraicos porque trascienden al poder de los métodos algebraicos.

La irracionalidad de π fue establecida en 1761 por Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Leonhard Euler (1707-1783), en 1748, y Lambert, en 1768, habían conjeturado la trascendencia de e, de π, y de otros números. Liouville construyó, 1844, algoritmos para calcular con números trascendentes.

Hace poco más de un siglo fue establecido el teorema siguiente:
La expresión $c_1e^{a_1} + c_2e^{a_2} + c_3e^{a_3} + \cdots$ nunca se anula, donde los c_i son enteros no todos nulos, los a_i son números algebraicos diferentes, y *e* es la base de los logaritmos neperianos

Charles Hermite (1822-1901) hizo la demostración, 1873, para el caso en que coeficientes y exponentes son racionales. Resulta la trascendencia del número e.

Ferdinand Lindemann dio, 1882, la demostración para el caso general. Resulta la trascendencia del número π.

Karl Weierstrass (1815-1897) publicó, 1885, una simplificación de la prueba.

P. Gordan (1837-1912) hizo una más, 1893.

El séptimo problema de Hilbert, Paris 1900, es el siguiente: ¿ $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente?. Sí. (C.L. Siegel, y, A. Gelfond. 1934): Es trascendente cualquier número a^b donde a es algebraico diferente de 0, de 1; y, b es algebraico irracional.

Kronecker, con socarronería, se había permitido decir a Lindemann: "Qué valor tiene su hermosa demostración si los números irracionales no existen?". Hilbert, empero, expresa la admiración de los matemáticos por los trabajos de Hermite y Lindemann.

P.W. Bridgman piensa que *e* es un "programa de procedimiento" más que un número por no poder ser expresado completamente con cualquier cantidad de dígitos.

A más de las trascendencias de *e* y de π hay otras consecuencias que sin exageración pueden calificarse de espectaculares.

Es imposible, con regla y compás, construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado porque todo número construible es algebraico, π no lo es, y π interviene fundamentalmente en el problema.

La curva exponencial $y = e^x$ pasa por un único punto algebraico (0,1). La curva logarítmica, $y = \log x$, tiene un único punto algebraico real, a saber (1,0). La sinusoide $y = \text{sen}\, x$ tiene un conjunto numerable de puntos algebraicos.

Ahora bien, los puntos del plano con coordenadas que son números algebraicos forman un conjunto denso en el plano.

Las 3 curvas señaladas, entre otras, tienen la notable propiedad de pasar por un conjunto no numerable de puntos con coordenadas trascendentes, esquivando, como quien dice, todos los puntos de un conjunto denso.

En muchas relaciones matemáticas interviene π, a veces inesperadamente. Por ejemplo, la probabilidad para que dos naturales escogidos al azar sean primos es de 6/π

A propósito de la relación (9)

Se trata de un problema, dice Dieudonné, planteado hacia 1850 y que fascinó en seguida a los matemáticos por la simplicidad de su enunciado y la dificultad de su solución.

En los libros ingleses, el problema es originariamente inglés; pero en ¿Qué es la matemática?, uno de cuyos autores, Courant, es alemán, el problema fue propuesto por August Ferdinand Möbius (1770-1868) en 1840 precisamente.

Corrientemente se habla del problema de los cuatro colores. Diversas publicaciones, libros o artículos, llevan ese título. A veces se dice también conjetura de los 4 colores. Raramente se oye decir teorema de los 4 colores. Quienes resolvieron el problema, Appel y Haken, escriben:

> *Con este caso ha aparecido un nuevo e interesante tipo de teorema, para el cual no hay una prueba de tipo tradicional*

En efecto, no se da cuenta de todos los casos posibles, como lo exige un teorema cualquiera, sino que heurísticamente, se logra mostrar que es suficiente examinar casos hasta un tope de 1936 "configuraciones bien determinadas para tener la seguridad de que con 4 colores es posible colorear cualquier mapa" (Dieudonné, p. 115, se permite subrayar el cuantificador universal cualquiera).

La historia según aparece en el extenso libro de Appel y Haken, o en el de Saaty y Kainen, a grandes rasgos es como sigue.

No sobra citar antes la afirmación de Saaty y Kainen, p. 4:

> *La historia de la conjetura de los cuatro colores muestra ampliamente cuántos errores se han cometido acerca de este problema.*

He aquí el enunciado:

> **Cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa sobre el plano o sobre la esfera de manera que no haya 2 regiones con frontera común que tengan el mismo color.**

Frederick Guthrie, estudiante en el University College de Londres, recibió en 1852 una carta de su hermano, ya egresado del mismo centro educativo, Francis Guthrie (1831-1899) en la que le pide que consulte al eminente profesor Augustus de Morgan (1806-1871) acerca de con cuántos colores es posible colorear el mapa de Gran Bretaña.

En 1878, el matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) somete el problema a la London Mathematical Society.

Una de las contribuciones más importantes al problema de los 4 colores fue la de Arthur Bray Kempe (1849-1922). Nomenclatura, enfoque y métodos de Kempe han sido utilizados incluso por Appel y Haken al resolver el problema. En 1879, Kempe pensó haber demostrado la conjetura. Lo cual se creyó durante 11 años.

Un mapa se dice normal si la representación de un país no encierra la de otro y si no más de 3 países se encuentran en un punto. Kempe se esforzó en establecer que para mostrar la conjetura de los 4 colores es suficiente mostrar que no puede haber un mapa normal con 5 colores.

Que parte de la argumentación de Kempe no es válida es lo que hace presente Percy John Heawood (1861-1955) en 1890.

Kempe había dejado en claro que en un mapa normal hay al menos un país con 2, 3, 4, o, 5 fronteras y que no hay países con 6, o más fronteras. Todo mapa normal ha de contener alguna de las 4 configuraciones. Es inevitable un conjunto de tales configuraciones.

Una segunda idea, a más de la inevitabilidad es la de la reducibilidad. Una configuración es reducible si hay manera de mostrar que tal configuración no puede aparecer en un mapa con 5 colores. Se trata entonces de determinar un conjunto inevitable de configuraciones reductibles.

- En 1879, Story, a partir del trabajo de Kempe, hace una reducción a la conjetura.
- En 1880, Tait cree haber "probado" la conjetura.
- En 1891, se establece que la conjetura de los 4 colores es equivalente a una conjetura en que se colorean aristas.
- En 1898, Heawood enuncia la conjetura en términos algebraicos.
- En 1912, Veblen expone la versión proyectiva.
- En 1913, George David Birkhoff (1884-1944) da nuevos rumbos a la investigación del problema al refinar los procedimientos de Kempe. En particular introduce la noción de polinomio cromático, con la que trabajarán Lewis, Whitney, y, Tutte.
- Phillip Franklin (1898-1965) introduce el número de Birkhoff, y, muestra que un mapa con 5 colores ha de contener al menos 22 países. Cota que el mismo Franklin sube a 25 en 1922; es decir, establece que todo mapa con 25 o menos países o regiones puede ser dibujado con 4 colores, o de otra manera, si se quiere trabajar en un contra ejemplo para la conjetura de los 4 colores ha de buscarse en un mapa por lo menos con 26 países.
- En 1925, Errera anota que todo mapa con no menos de 26 regiones o países ha de contener, mínimo, 13 pentágonos.
- En 1926, Reynolds eleva la cota a 28. En 1931, Whitney introduce la noción de grafo dual. En 1937, Franklin eleva la cota a 32.

- En el mismo 1937, Winn muestra que ha de haber al menos 2 países con más de 6 aristas en un mapa como el de Franklin.
- En 1938, Franklin muestra que cualquier mapa irreducible cuya cota inferior sea 32 ha de contener por lo menos 15 pentágonos.
- En 1940, Winn eleva la cota inferior, de países o regiones, a 36.
- En 1970, Ore y Stemple elevaron la cota a 40. La cota fue llevada a 52 y finalmente a 96.

El gran matemático Herman Minkowski dijo alguna vez a sus estudiantes que la conjetura de los 4 colores no había sido establecida todavía debido a que solo matemáticos de tercera categoría se habían ocupado de ella "Creo que puedo probarla", declaró. Tiempo después, admitió "El cielo está enojado por mi arrogancia; también mi prueba es defectuosa".

Dónde estaría hoy esta secuencia si en los años 70 no hubiera intervenido un computador que trabajó durante 1200 horas, ejecutó 10^{10} operaciones lógicas para examinar 1936 casos?

El problema fue resuelto en junio de 1976 en cuanto gracias a la multitud de casos examinados por el computador, Appel y Haken llegan a la convicción de que no hay más posibilidad para un mapa que requiera 5 colores. No se demostró un teorema, en el sentido clásico de la expresión, de dar cuenta de todos los casos posibles. Guardadas las debidas proporciones, es como asegurar que en el desarrollo decimal de π no puede haber períodos porque en 10 millones de cifras no ha aparecido ninguno.

La conjetura de los 4 colores está prácticamente resuelta, en sentido afirmativo, pero no hay en el sentido que el término ha tenido desde los griegos, un teorema de los 4 colores.

A propósito de la relación (10)

Todo número primo de la forma 4n+1 es la suma de dos cuadrados de una sola manera. He aquí un pequeño número de verificaciones.

n = 1, $4\cdot1 + 1 = 5 = 2^2 + 1^2$
n = 2, $4\cdot2 + 1 = 9$. No es primo
n = 3, $4\cdot3 + 1 = 13 = 3^2 + 2^2$
n = 4, $4\cdot4 + 1 = 17 = 4^2 + 1^2$
n = 5, $4\cdot5 + 1 = 21$. No es primo
n = 6, $4\cdot6 + 1 = 25$. No es primo
n = 7, $4\cdot7 + 1 = 29 = 5^2 + 2^2$
n = 8, $4\cdot8 + 1 = 33$. No es primo
n = 9, $4\cdot9 + 1 = 37 = 6^2 + 1^2$
n = 10, $4\cdot10 + 1 = 41 = 5^2 + 4^2$
n = 11, $4\cdot11 + 1 = 45$. No es primo
n = 12, $4\cdot12 + 1 = 49$. No es primo
n = 13, $4\cdot13 + 1 = 53 = 7^2 + 2^2$
n = 14, $4\cdot14 + 1 = 57$. No es primo
n = 15, $4\cdot15 + 1 = 61 = 6^2 + 5^2$
n = 16, $4\cdot16 + 1 = 65$. No es primo
n = 17, $4\cdot17 + 1 = 69$. No es primo

n = 18, $4 \cdot 18 + 1 = 73 = 8^2 + 3^2$
n = 19, $4 \cdot 19 + 1 = 77$. No es primo
n = 20, $4 \cdot 20 + 1 = 81$. No es primo
n = 21, $4 \cdot 21 + 1 = 85$. No es primo
n = 22, $4 \cdot 22 + 1 = 89 = 8^2 + 5^2$
n = 23, $4 \cdot 23 + 1 = 93$. No es primo
n = 24, $4 \cdot 24 + 1 = 97 = 9^2 + 4^2$
n = 25, $4 \cdot 25 + 1 = 101 = 10^2 + 1^2$

Bibliografía

1913. Edouard, MORITZ. *On mathematics*. 1958. Dover. New York. xi + 410 pp.
1932. David HILBERT, and, COHN-VOSSEN. *Geometry and the imagination*. New York. Chelsea. ix+357 pp.
1940. Godfrey Harold HARDY. *A mathematician's apology*. Cambridge University Press.
1981. *Autojustificación de un matemático*. Barcelona. Ariel. 147 pp.
1941. COURANT-ROBBINS. *¿Qué es la matemática*? 1971. Madrid. Aguilar, xx + 533 pp.
1947. François le LIONNAIS. Les grands courants de la pensée mathématique. 1962. Nouvelle édition augmentée. 559 pp. 1962. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires. Eudeba. 567 pp.
- III.D. Matemáticas, belleza, estética y bellas artes.
- Arte y estética. Las matemáticas y la belleza. pp. 462-530.
- F. le Lionnais. La belleza en las matemáticas.pp 464-492.
- Buhl. Estética científica y teorías modernas. pp. 495-504.
- Andréas Speiser. El concepto de grupos y las artes.pp. 505-509.
- Le Corbusier. La arquitectura y el espíritu matemático.pp. 510-522.
- Henri Martin. Las matemáticas y la música.pp. 523-530.

1958. Heirinch Dörrie. *100 great problems of elementary mathematics. Their history and solution*. 1965. New York. Dover. x + 393 pp.
1972. Morris KLINE. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York. Oxford University Press. xvii + 1238 pp.
1976. B. A. M. S. LXXXII. September.
1976. Imre LAKATOS. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. 1978. AU 206. 197 pp.
1976. Lynn Arthur STEEN. *Solution of the four color problem*. News and Letters. Mathematics Magazine. XLIX. 4. September. 219-222 pp.
1982. B. A. M. S. VI N1. January. p. 120.
1984. Carlos Pompeyo GONZALEZ M. *Geometría para cuarto secundario. Los poliedros*. (trabajo de grado para licenciatura en Ciencias de la Educación en Matemática. Universidad Nacional. Bogotá Marzo 1984. v + 187 pp).
1987. Jean DIEUDONNE. *Mathematics-The music of reason*. 1992. English translation. x + 287 pp. Hay versión española en AU.
1988. David WELLS. *Which is the most beautiful?*. The Mathematical Intelligencer. X. 4. Fall. 30-31 pp.
1989. Kenneth APPEL, and, Wolfgang HAKEN. *Every planar map is four colorable*. Providence. Rhode Island. American Mathematical Society. xv + 741 pp.

1990. David WELLS. *Are these the most beautiful?* 37-41 pp. The Mathematical Intelligencer. XII. 3. Summer.
1991. Elon Lages LIMA. *Meu professor de Matemática*. Coleçao do professor de matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 206 pp.
1991. Victor KLEE, and, Stan WAGON. *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*. The Mathematical Association of América. xv + 336 pp.
1994. Alberto CAMPOS. *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá. xvi + 600 pp.
1994. Alberto CAMPOS. *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá. vi + 717 pp.

.