Algunas conjeturas famosas

Claudio del Pino O.[1]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Resumen

Como todos sabemos, la matemática vive en torno al planteamiento de problemas y la búsqueda de sus soluciones. Cuando aparece un problema y se intenta resolverlo, se puede empezar por analizar algunas situaciones particulares, a partir de las cuales se podría empezar a sospechar una solución, es decir se establece una conjetura. A partir de ahí se intenta probar dicha conjetura o buscar un contraejemplo. En la matemática hay ejemplos de conjeturas que se han hecho famosas, porque ha sido muy difícil encontrar un contraejemplo o probar su validez. En este trabajo se comentan algunas de ellas.

Conjeturas, contraejemplos y demostraciones.

Iniciamos este trabajo señalando las diferencias entre los conceptos de conjetura, teorema y contraejemplo, pues ellos aparecerán con frecuencia. Una conjetura en una afirmación sobre la cual se sospecha que es válida, pero que no se tiene una completa y absoluta certeza. En caso de encontrar un ejemplo que muestre que en ese caso la afirmación no se cumple, se habría probado que la afirmación en cuestión es falsa. El ejemplo con el cual se muestra que una afirmación no es válida recibe el nombre de contraejemplo. Ahora bien, si es posible encontrar una cadena de argumentos válidos, que partiendo de elementos ya probados concluir que la afirmación se cumple, se habría probado que la conjetura es válida. En este caso la afirmación se transformaría en un teorema.

Veamos, supongamos que partimos con la conjetura:

“Para todo número natural, la expresión

$$A = n^2 + n + 41$$

es un número primo”.

[1] Correo electrónico: cdelpino@utalca.cl

Para empezar a estudiar si esta conjetura es verdadera o falsa, analicemos algunos casos particulares:

Valor de n	Valor de n^2+n+41	¿n^2+n+41 es primo?
1	43	si
2	47	si
3	53	si
4	51	si
5	71	si
6	83	si
7	97	si
8	113	si
9	131	si
10	151	si

Estos 10 casos analizados sugieren que esta conjetura parece ser verdadera, pero están muy lejos de probarla (¿por qué?). Si seguimos, con paciencia, chequeando los siguientes casos, llegaremos al caso $n = 40$, para el que se tiene:

$$A = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 40 + 40 + 1 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40+1)^2 = 41^2$$

NO es primo

Por lo tanto, este caso particular para n=40, se transforma en un contraejemplo que prueba que la conjetura analizada es una afirmación falsa.

Veamos otra conjetura. Supongamos que jugando con números naturales nos percatamos que cuando tomamos un número impar y calculamos su cuadrado, éste resulta ser impar también. De aquí surge entonces una conjetura

"El cuadrado de todo número impar es impar".

Para iniciar el estudio de esta conjetura analicemos algunos casos particulares:

Valor de n	**Valor de n^2**	**¿n^2 es impar?**
1	1	si
3	9	si
5	25	si
7	49	si
9	81	si
11	121	si

Estos ejemplos avalan la conjetura. Al analizar otros casos, se puede verificar que al parecer la conjetura es válida. De aquí surge la idea de intentar probarla. Para ello, sea n un número entero impar cualquiera. Luego, de la definición de número impar, existe un entero m tal que

$$n = 2m + 1$$

de donde

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

es impar. Esta argumentación proporciona una demostración de la conjetura, luego ella se constituye en un teorema.

En lo que sigue se revisan algunas conjeturas famosas por tener enunciados de muy fácil comprensión, pero resoluciones altamente complejas. Incluso algunas de ellas aún no se han resuelto.

Problema de los 4 colores:

Este problema es uno de los más famosos de la matemática. Una razón de ello es posible que se deba a su simple planteamiento:

¿Cuál es el mínimo número de colores que se necesitan para pintar un mapa?.

Se trata entonces de determinar la menor cantidad de colores que bastan para pintar correctamente cualquier mapa de modo que países vecinos, con una *línea* de frontera común, deben pintarse distinto color.

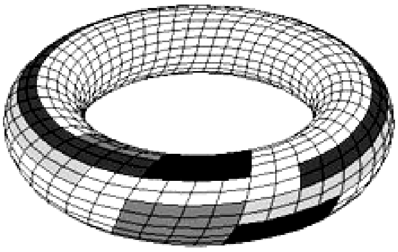
Entre algunos antecedentes de este problema, se puede mencionar que

- En el año 1852, Francis Guthrie[1] (estudiante recién egresado de la Universidad de Londres) envía una carta a su hermano (Frederick) planteándole este problema, quien a su vez se lo plantea a su profesor Augusto de Morgan[2].

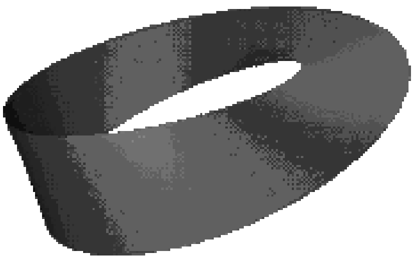
[1] 1839-1899. Abogado y botánico inglés.
[2] 1806-1871. Matemático y lógico inglés.

Francis Guthrie

- En el año 1879, Arthur B. Kempe publica un artículo con una demostración de que 4 colores era suficiente.
- En el año 1890 Percy J Heawood encuentra un error en la demostración propuesta por A. Kempe. Heawood trabaja por 60 años en el problema. Logró probar que:
    - En la superficie de un neumático 7 colores bastan.



    - En una cinta de Moebius 6 colores bastan.



- Entre los años 1970-1976, Kenneth Appel y Wolfang Haken *demuestran* usando programas computacionales que 4 colores bastan.

Luego, de la novedosa demostración de Appel y Haken usando el computador se tiene, después de alrededor de 100 años, una respuesta concluyente a la interrogante inicial:

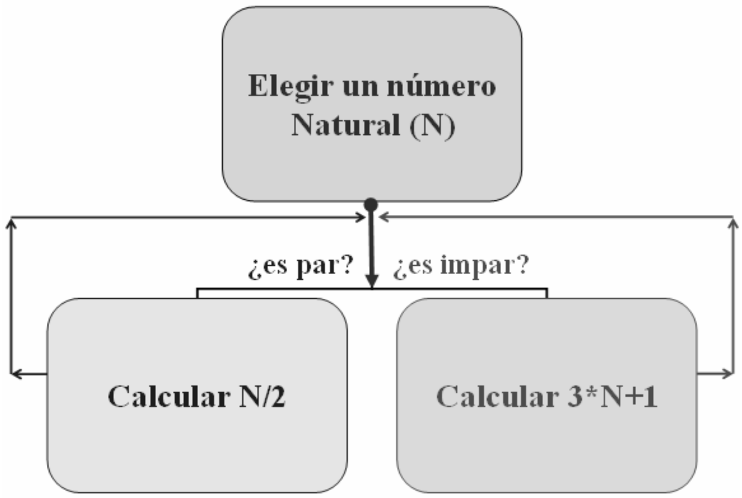
Teorema: *Bastan cuatro colores para pintar cualquier mapa plano, sin que dos países con frontera común, tengan el mismo color*.

Problema 3x+1.

Para introducirnos en esta conjetura, partamos construyendo sucesiones de números naturales, de acuerdo a la siguiente regla:

- Se elige un número natural cualquiera, el cual será el primer elemento de la sucesión.
- Si el primer elemento es un número par el segundo será la mitad de éste. Si el primer elemento es impar, el segundo elemento será e triple de éste más 1.
- El tercer elemento de la sucesión se forma a partir del segundo y siguiendo las mismas instrucciones precedentes.
- Y así sucesivamente.

Esquemáticamente, la regla para generar las sucesiones recién indicadas, queda



Veamos algunos ejemplos de estas sucesiones:

Sea $a_1 = 10$. Como a_1 es par, $a_2 = a_1/2 = 10/2 = 5$. Como a_2 es impar, $a_3 = 3 \cdot a_2 + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$. Como a_3 es par se tiene que $a_4 = a_3/2 = 8$. Luego, $a_5 = 4$, $a_6 = 2$ y $a_7 = 1$. Para resumir de manera más fácil esta sucesión, la notaremos:

10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

El proceso lo hemos detenido en el número 1, púes si continuamos se entra en un *ciclo infinito*, pues después del 1 vendrían: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc.

Si iniciamos el proceso con el número 9, se obtiene la sucesión

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Ahora si comenzamos con el número 25, se obtiene

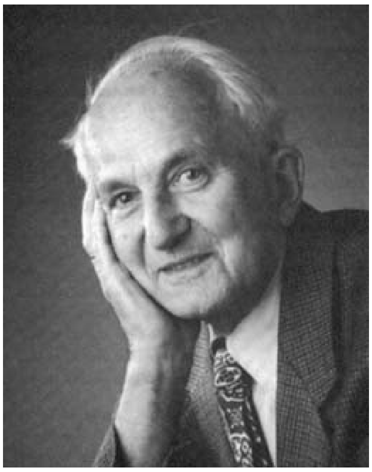
25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Y si partimos con el 27:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Trabajando con estas sucesiones, Lothar Collatz[1] planteó en el año 1937 la siguiente conjetura[2]:

Partiendo de cualquier número natural, la sucesión recién definida siempre termina en el número 1



Lothar Collatz

Esta conjetura, a pesar de tener un enunciado extremadamente sencillo, aún no se ha podido resolver categóricamente, es decir aún no se ha encontrado un contraejemplo ni logrado una demostración de ella. Como un dato curioso se puede mencionar que hasta septiembre del presente año se ha verificado la validez de esta conjetura hasta el *número inicial* $19 \cdot 2^{58}$.

Como es de suponer existen otras muy famosas conjeturas en la matemática, alguna de las cuales aún no han podido ser resueltas. Por ejemplo:

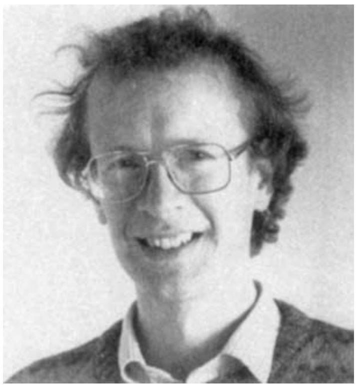
- El Último Teorema de Fermat (planteada en el año 1600):

[1] 1910-1990. Matemático Alemán.

[2] Esta conjetura también es conocida con el nombre de Algoritmo de Hasse, Conjetura de Kakutani, Problema de Ulam, Problema de Syracusa

La ecuación
$$x^n + y^n = z^n$$
no tiene soluciones enteras para n>2.

Una multitud de famosos matemáticos abordaron esta conjetura (Leonard Euler, Sophie Germain, Lejeune Dirichlet, Adrien Legendre, Gabriel Lamé, Agustín Cauchy, Ernst Kummer, Gerhard Frey). Finalmente, y solo en año 1995, el matemático inglés Andrew Wiles demuestra que esta conjetura es un teorema.



Andrew Wiles

- La conjetura de Goldbach[1] (planteada en el año 1742.):

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

Esta conjetura se encuentra sin solución hasta la fecha.

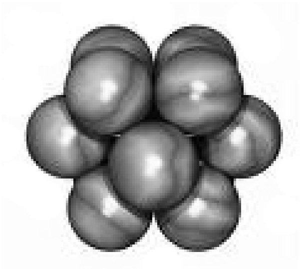
- Problema de Kepler (planteado el año 1611):

Johannes Kepler

La manera más eficiente (que la parte de la caja que quede vacía sea la menor posible) de llenar una caja con esferas idénticas es simplemente hacerlo de la manera como cualquier frutero seguiría al apilar naranjas en una caja.

[1] Christian Goldbach. 1690-1764. Matemático ruso.

Recién el año 1998, 4 siglos después de la formulación de esta conjetura, Thomas Hales publicó un articulo en la revista Annals of Mathematics en el cual se prueba la conjetura de Kepler.



El artículo de Hales consta de más de 100 páginas de argumentaciones matemáticas, y usa un programa computacional para revisar cerca de 5000 casos para los que hay que optimizar funciones de más de 200 variables. Los expertos que revisaron la validez de esta demostración se declararon incapaces de revisar en detalle todos los casos que se abordaban computacionalmente. Por esta razón el comité aseguró que la demostración propuesta por Hales era válida *al menos* en un 99%. Como es de suponer esto ha generado toda una controversia, que recuerda las discusiones en torno a la demostración del teorema de los 4 colores.

Thomas Hales

Bibliografía

[1] *La demostración de la conjetura de Kepler*. http://www.elpais.com/articulo/futuro/demostracion/conjetura/Kepler/elpfutpor/20060104elpepifut_1/Tes

[2] *Algunas conjeturas matemáticas*. http://www.gratisweb.com/juanfco20004/conje.pdf