Cónicas

Juana Contreras S.

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Los griegos descubrieron las cónicas en estado salvaje en los conos o cilindros y Apolonio las cultivó como un mero juego de ingenio. ¿Cuál sería la sorpresa, varios siglos después, cuando Kepler descubrió que la trayectoria del planeta Marte es elíptica, y Galileo que la caída de las piedras es parabólica?.

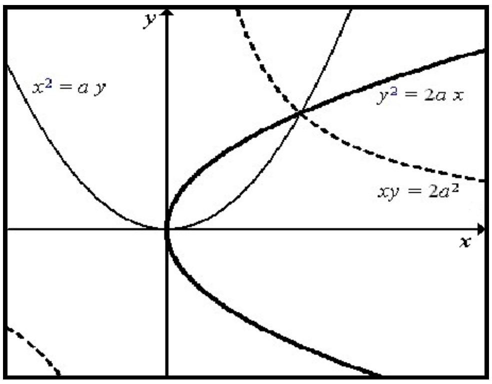
B. Mandelbrot, 1984

Introducción

El descubrimiento de las curvas denominadas *cónicas* se atribuye al matemático griego *Menecmo* (año 350 a.C.), discípulo de Euclides. Su hallazgo se produjo en los intentos de resolver el clásico problema de Delos de la *duplicación del cubo*, mediante la interpolación de dos medias proporcionales.

Menecmo advirtió que geométricamente, el problema consiste en encontrar el punto de intersección de dos curvas especiales (de dos cónicas), de dos parábolas o de una parábola y una hipérbola, desplazando convenientemente el plano de corte con el cono. Sin embargo, encontrar el punto de corte de esas dos cónicas es un problema que no pudo resolver con regla y compás. La imposibilidad de resolver este problema con regla y compás fue demostrado en el año 1837 por el matemático francés *L. Wantzel*.

La solución encontrada por *Menecmo*, en lenguaje de geometría analítica actual, utilizando ecuaciones de las cónicas es la siguiente:

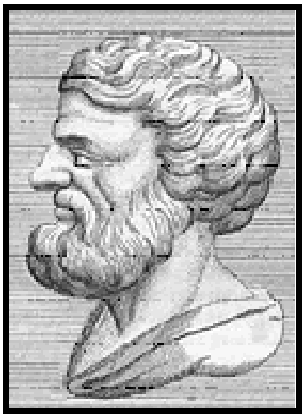


Dado un cubo de arista a. La solución x del *problema de Delos*, se encuentra resolviendo la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, resultado de interpolar dos medias proporcionales entre a y su doble $2a$. Se obtienen las parábolas $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, y la hipérbola equilátera $xy = 2a^2$.

El punto de intersección de las dos parábolas, o de la intersección de una de las parábolas y la hipérbola proporciona $x^3 = 2a^3$, que entrega la arista *x* de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen del cubo dado.

Sin embargo, el primero en realizar un estudio sistemático y formal de las cónicas fue el matemático griego *Apolonio de Perga* (262-190 A.C.), recordado como *El Gran Geómetra*.

Antes de *Apolonio*, una cónica se definía como la intersección de un cono con un plano perpendicular a una generatriz. La innovación de *Apolonio* fue generalizar al caso de hacer variar el ángulo de inclinación del plano secante.



Apolonio de Perga

En relación a estas curvas, descubrió que se podían clasificar en tres clases que denominó elipses, hipérbolas y parábolas, y estudió las propiedades fundamentales de los clásicos elementos notables de estas curvas: *ejes*, *centros*, *diámetros*, *asíntotas*, *focos*, *tangentes* y *normales*.

Apolonio registró sus descubrimientos sobre estas curvas en su magna obra *Las Cónicas*, libro que lo inmortalizó en la Historia de la Matemática griega, junto con *Los Elementos* de *Euclides*, los grandes tratados de *Arquímedes*, *El Almagesto* de *Ptolomeo*, *La Aritmética* de *Diofanto* y *La Colección Matemática* de *Pappus*. La obra de Apolonio supera lo que con anterioridad habían escrito sobre el tema *Menecmo*, Euclides y otros.

Los matemáticos griegos, y *Apolonio* en particular, se ocuparon ampliamente de las propiedades geométricas de las cónicas. No obstante, hubo que esperar casi diecinueve siglos, hasta el siglo XVII época en que se desarrolló la Geometría Analítica, a que importantes aplicaciones de las cónicas quedaran puestas de manifiesto y las cónicas jugaran, de hecho, un papel preponderante en el desarrollo del cálculo.

En este siglo fueron descubiertas las propiedades proyectivas de las cónicas. Pascal, en el año 1640, publicó un artículo *Ensayo sobre las cónicas* que trata la geometría de las secciones cónicas, dando un primer avance a los trabajos de Apolonio.

Las cónicas son consideradas como las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física. *Arquímedes*, sabía que si los rayos del sol incidían paralelos al eje de un espejo parabólico, éstos se reflejaban y convergían en un solo punto. *Galileo Galilei* demostró que la trayectoria de un proyectil es una parábola.

Pero ciertamente, dos grandes descubrimientos fueron, el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses que tienen al sol como uno de sus focos (*J. Kepler*, astrónomo alemán 1570-1630) y que, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica (*I. Newton*, matemático y físico inglés, 1642-1727).

Definiciones de las cónicas

Hasta el siglo XVII existía la visión puramente geométrica de las secciones cónicas dada por los griegos. Con el desarrollo de la Geometría Analítica, se incorporaron las nociones de coordenadas y distancia, definiendo estas curvas como lugares geométricos de puntos que verificaban ciertas propiedades en términos de distancia. En esta sección se presentarán algunas definiciones de las cónicas, y elementos que las caracterizan.

1. Definición de los griegos

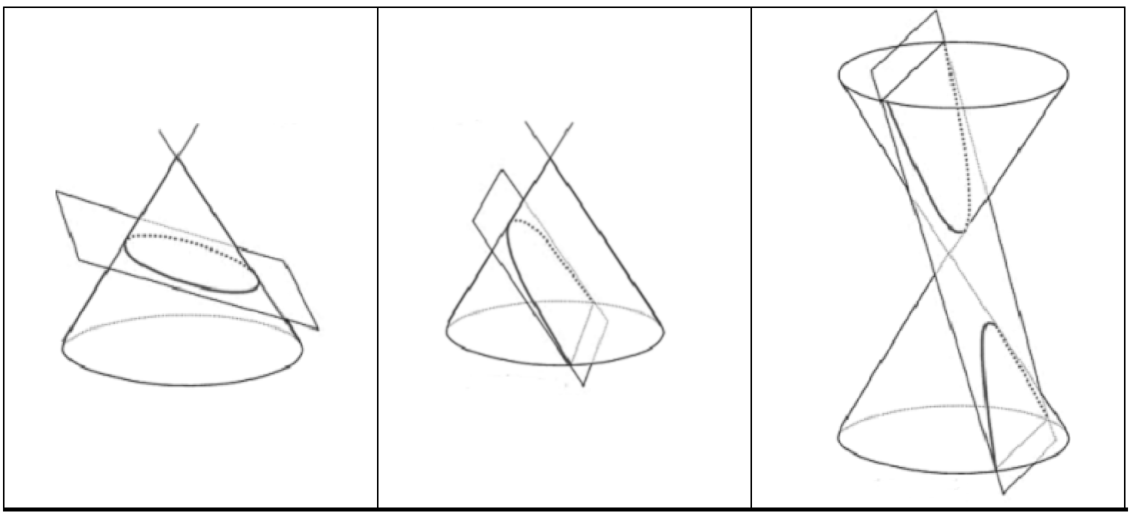
La primera definición de cónicas se atribuye a *Menecmo*, como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz. Posteriormente, *Apolonio* de Perga, dio una definición genérica de las secciones cónicas.

Definición. Una *sección cónica* es una curva que se obtiene de intersectar un plano con la superficie de un cono circular recto.

Se distinguen los siguientes tipos de secciones cónicas:

a) Las *cónicas propias*, o simplemente *cónicas*, son las curvas que se obtienen cuando el plano secante no pasa por el vértice del cono. En este grupo de curvas se encuentran tres clases de cónicas, según la posición del plano secante:

- Si el plano secante corta un solo manto del cono e intersecta a todas las generatrices del cono, la curva que resulta es una *elipse*.
- Si el plano secante es paralelo a una generatriz del cono, entonces la curva que se obtiene es una parábola.
- Si el plano secante intersecta ambos mantos del cono (y no pasa por el vértice), se obtiene una *hipérbola*. Esta curva se compone de dos ramas abiertas.



Elipse *Parábola* *Hipérbola*

b) *Cónicas degeneradas*. Cuando el plano contiene el vértice del cono, la intersección es un par de rectas secantes, o se reduce a una recta, o a un punto, o el conjunto vacío.

En general, se denominan *cónicas* a las curvas que pertenecen a la clase de las cónicas propias.

2. Definición de las cónicas como lugares geométricos de puntos

Las cónicas se pueden definir en términos de uno de sus *focos*, de una recta llamada *directriz* y un número llamado *excentricidad*.

Definición. Una *cónica* es el lugar geométrico de todos los puntos *P* de un plano tales que la razón entre la distancia de *P* a un punto fijo *F* y de *P* a una recta fija *D*, es constante.

El punto fijo *F* se llama *foco* de la cónica, la recta *D* es la *directriz* asociada al foco *F*, y la razón constante se denomina *excentricidad* de la cónica y se denota por *e*.

Luego, una *cónica* es el conjunto de todos los puntos P del plano, tales que:

$$\frac{\text{distancia}(P,F)}{\text{distancia}(P,D)}=e$$

Observaciones.

a) En el año 1822, *Dandelin*[1] relacionó la definición de los griegos con la definición de cónica como lugar geométrico de puntos, mostrando que los focos y las directrices se obtienen con la ayuda de una o dos esferas inscritas en el cono.

   Teorema de Dandelin. Dada una superficie cónica y un plano que lo corta. Si es posible dibujar una o dos esferas tangentes interiores al cono y al plano secante, entonces, los puntos de tangencia de dichas esferas con el plano secante son los focos de la cónica, y los planos de las circunferencias, que resultan de la intersección de cada esfera con el cono, intersectan al plano de la cónica en una recta (si es parábola) o dos rectas (si es elipse o hipérbola), son las directrices de la cónica.

   - Se llaman *focos* de una sección cónica a los puntos de contacto de su plano (el plano secante) con cada esfera inscrita en el cono y tangente al plano de la sección cónica. La elipse y la hipérbola tienen dos focos F_1 y F_2, y la parábola tiene solo uno, F .

   - Se denomina *directriz* de una cónica a la recta que resulta de la intersección del plano secante que contiene a la cónica con el plano que contiene a la circunferencia de contacto

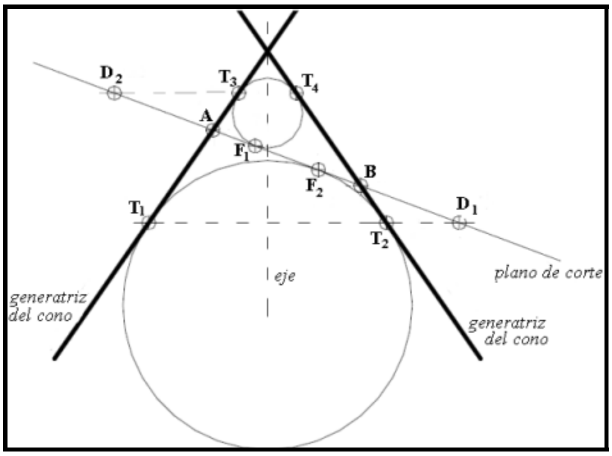
[1] *Dandelin, Germinal-Pierre* (1794-1847) matemático e ingeniero belga, que participó en la construcción de dos telescopios. Ingresó a la Real Academia de Bruselas en 1822, gracias a un brillante trabajo geométrico sobre las cónicas, donde presentaba un teorema que caracterizaba los focos de las secciones cónicas como los puntos de tangencia de lo que actualmente se conoce como las esferas de *Dandelin*.

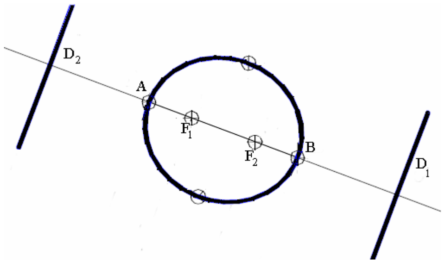
de cada esfera inscrita (correspondiente a cada foco), con el cono. La elipse y la hipérbola tienen dos directrices, las rectas D_1 y D_2, y la parábola solo una, la recta D.

- Se llama eje focal a la recta F_1F_2 que contiene a los focos.

A continuación se presenta el *teorema de Dandelin*, gráficamente, en cada tipo de cónicas:

En una *elipse*:

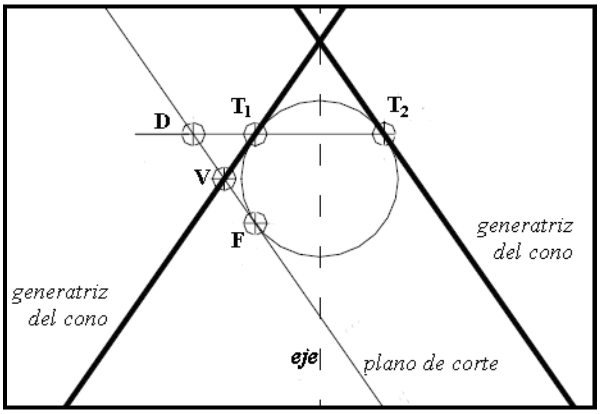


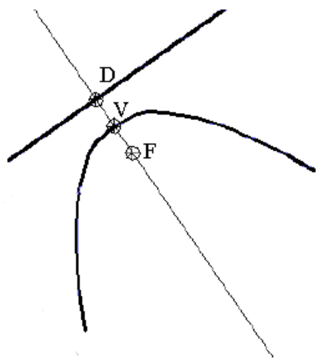


Los puntos F_1 y F_2 son los focos y las rectas D_1 y D_2 son las directrices de la elipse.

El *teorema de Dandelin en la elipse* permite explicar la propiedad clásica de esta cónica como lugar geométrico de todos los puntos P del plano tales $PF_1 + PF_2 =$ constante, igual a la distancia entre los vértices de la elipse.

En una *parábola*:

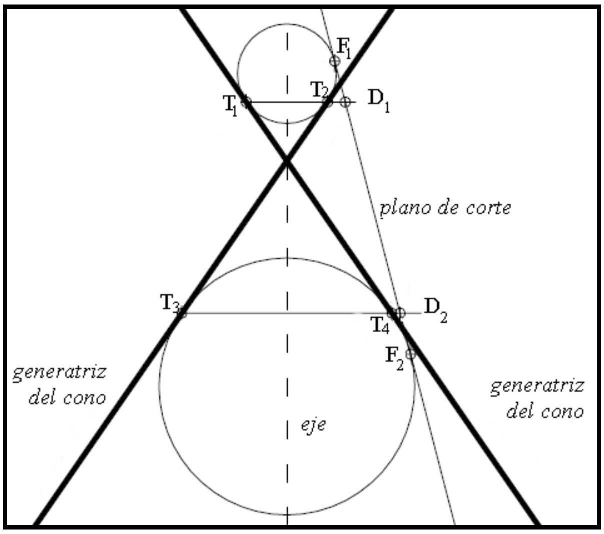


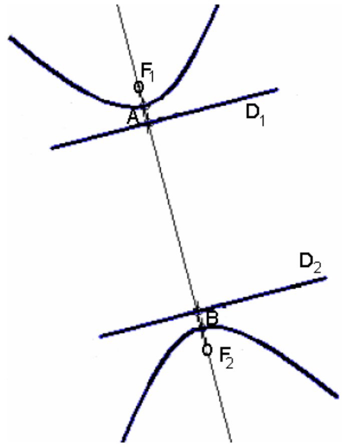


El punto F es el foco y la recta D es la directriz de la parábola.

El *teorema de Dandelin en la parábola* permite explicar la propiedad de esta cónica como el lugar geométrico de todos los puntos P del plano que equidistan del foco y de la directriz.

En una *hipérbola*:





Los puntos F_1 y F_2 son los focos y las rectas D_1 y D_2 son las directrices de la hipérbola.

El *teorema de Dandelin en la hipérbola* permite explicar la propiedad clásica de como el lugar geométrico de todos los puntos *P* del plano, tales que la diferencia de las distancias a los dos focos F_1 y F_2 es constante, igual a la distancia entre los vértices de la hipérbola.

b) Respecto de la *excentricidad*.

Si P es un punto cualquiera de una cónica, entonces $\dfrac{\text{distancia}(P,F)}{\text{distancia}(P,D)} = e$. Esta razón constante que cumplen *todos* los puntos de la curva es la *excentricidad* de la cónica.

- Si $0 < e < 1$ entonces la cónica es una *elipse*. Si $e = 0$, la cónica es una *circunferencia.*
- Si $e = 1$ entonces la curva es una *parábola.*
- Si $e > 1$ entonces la cónica es una *hipérbola*.

3. Definición en términos de geometría analítica.

Definición. Una *cónica* es el lugar geométrico de todos los puntos (x,y) del plano, que satisfacen una ecuación de segundo grado en las variables x e y:

$$P(x,y) = 0, \quad \text{donde } P(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

y toda curva definida analíticamente por una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, es una cónica.

Según esta definición:

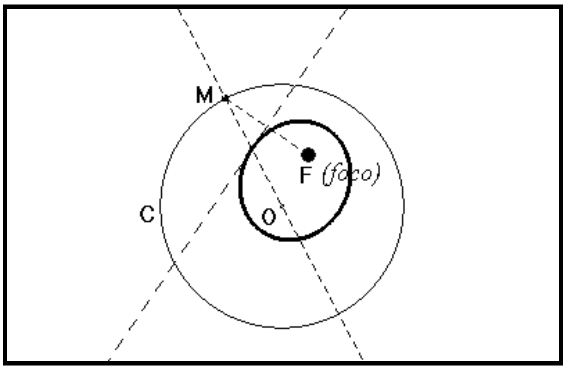
- Una cónica es no degenerada si el polinomio $P(x,y)$ no se puede descomponer como producto de dos polinomios de primer grado con coeficientes reales.

- Una cónica degenerada corresponde al caso donde $P(x,y)$ se descompone como producto de dos polinomios lineales (sobre los reales).

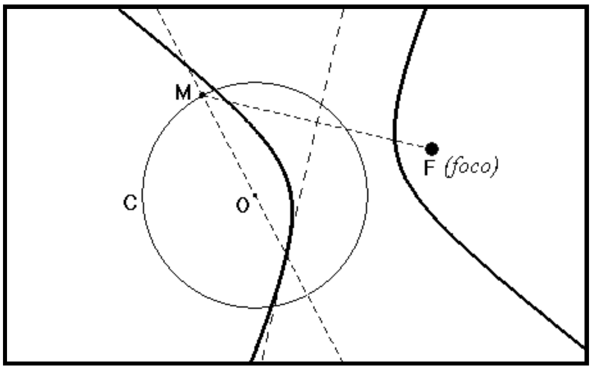
Este importante resultado se debe al matemático holandés *Jan de Witt*. Se complementará más adelante, en este trabajo, el tema de cónicas definidas mediante ecuaciones de segundo grado.

4. Definición como curva que equidista de un punto y una circunferencia (o una recta).

Definición. Una *cónica* es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (el foco) y de una circunferencia o recta fija *C*.



Foco F en el interior del circulo (elipse)



Foco F en el exterior del circulo (hipérbola)

Cuando el foco *F* es interior a la circunferencia se obtienen elipses, si se encuentra en el exterior se obtienen hipérbolas, y cuando *C* es una recta se obtienen parábolas.

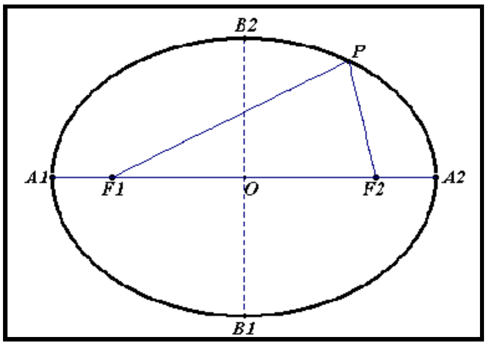
Una definición equivalente es: una *cónica* es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto fijo *F* y son tangentes a *C*.

A continuación se presentará cada cónica como lugar geométrico de puntos de un plano, y algunas propiedades que las caracterizan.

Propiedades de las cónicas

La elipse

Definición. La *elipse* es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano F_1 y F_2 es una constante mayor que la distancia entre los dos puntos fijos.



$$\text{distancia}(P, F_1) + \text{distancia}(P, F_2) = \text{constante}$$

Los elementos de una elipse son:

- Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la elipse. El punto O es el *centro* de la elipse.
- La distancia entre los focos $F_1F_2 = 2c$ es llamada distancia focal.
- La suma constante se representa por $2a$, siendo $2c < 2a$.
- El segmento A_1A_2 es el eje mayor y el segmento y B_1B_2 es el eje menor (perpendicular al eje mayor) de medidas $2a$ y $2b$ respectivamente, tal que $a>b$.
- Los cuatro puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 son los vértices de la elipse.
- Los segmentos PF_1 y PF_2 se denominan radios vectores.
- Un segmento PQ tal que P y Q son puntos de la elipse, se llama cuerda de la elipse. Cuando PQ pasa por el centro O, PQ es un diámetro de la elipse.

Observaciones.

a) Los parámetros a, b, c están relacionados mediante la ecuación: $a^2 = b^2 + c^2$.

b) La excentricidad de la elipse es: $e = \frac{c}{a}$, es un número menor que 1.

c) Una elipse tiene dos directrices.

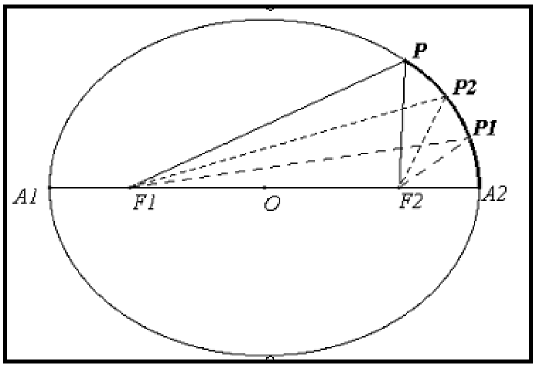
Considerando estas notaciones, una elipse cuyos focos son los puntos F_1 y F_2 y su eje mayor es $2a$, es el conjunto de todos los puntos P que satisfacen la relación:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Construcción de una elipse

Construir aproximadamente una elipse, dados los focos F_1 y F_2 en un plano, y la medida $2a$ del eje mayor.

Método 1. Una construcción manual (*Método del jardinero*).



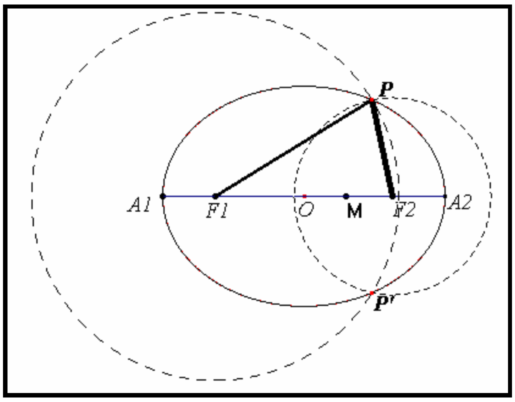
Una construcción manual de la elipse consiste en tomar un hilo de longitud dada y atar sus extremos en cada uno de los focos F_1 y F_2.

Estirar el hilo de manera y colocar un lápiz (representado por P en el dibujo) en la parte libre del hilo. Desplazar el lápiz manteniendo tenso el hilo. La figura resultante será una elipse.

Método 2: Construcción de puntos de una elipse.

- Construir la recta F_1F_2, y el punto medio O del segmento F_1F_2.
- Construir los vértices A_1 y A_2 en la recta F_1F_2.
- Crear un punto M en el interior del segmento A_1A_2.

- Construir la circunferencia con centro F_1 y radio MA_1, y la circunferencia con centro F_2 y radio MA_2. Los puntos de intersección de ambas circunferencias son dos puntos de la elipse.
- Otro par de puntos de la elipse se obtienen construyendo las circunferencias con centro en F_1 y radio MA_2, y la circunferencia con centro en F_2 y radio $MA1$.
- Tomando nuevos puntos M en el segmento A_1A_2, se obtiene otros puntos de la elipse.

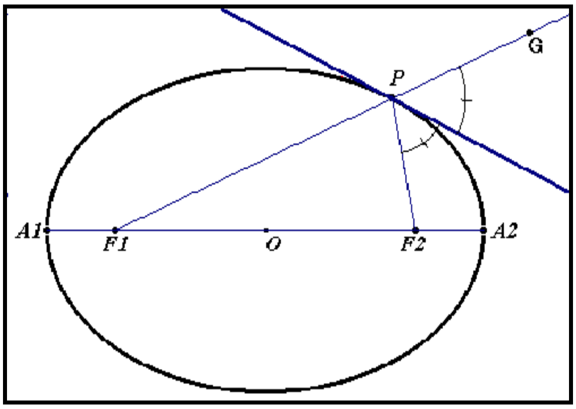


Esta construcción de una elipse, por puntos, se puede realizar con apoyo de un programa de geometría dinámica.

Propiedades de la elipse

1. Los ejes A_1A_2 y B_1B_2 son ejes de simetría. El punto *O* es centro de simetría de la curva.

2. La recta tangente a una elipse en un punto *P* de la curva, es la bisectriz *exterior* del ángulo F_1PF_2 (es la bisectriz del ángulo F_2PG).



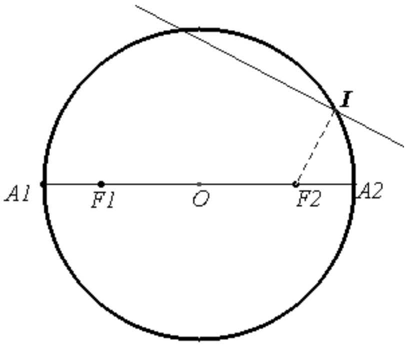
La recta normal a la elipse en el punto *P*, es la bisectriz *interior* del ángulo F_1PF_2.

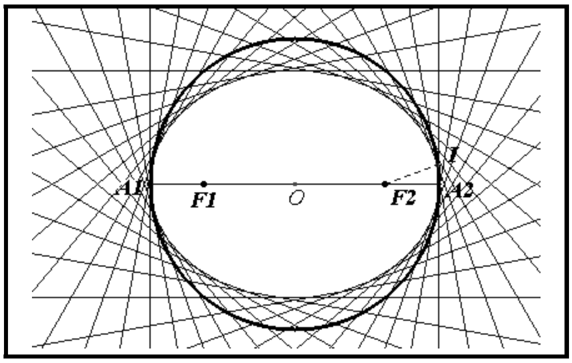
Propiedad de reflexión de una elipse: *los ángulos que forman cada radio vector F_1P y F_2P con la recta tangente a la elipse en un punto P, son iguales.*

Una aplicación de esta propiedad: *Todo rayo luminoso (u onda sonora) que parte de un foco F_1, es reflejado por la elipse siguiendo una recta que pasa por el otro foco F_2.*

3. La ecuación cartesiana reducida de una elipse cuyos focos son $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Las ecuaciones de las directrices de esta elipse son $x = \pm \dfrac{a^2}{c}$
4. El área de la elipse con eje mayor $2a$ y eje menor $2b$, es $\pi\, a\, b$.
5. La elipse cuyos focos son F_1 y F_2 y eje mayor $2a$, es la *envolvente* de la familia de rectas perpendiculares a la recta $F_2 I$ en el punto *I*, donde el punto *I* describe la circunferencia con centro O y radio *a* (circunferencia principal).

   Esta propiedad permite construir una elipse de manera aproximada.



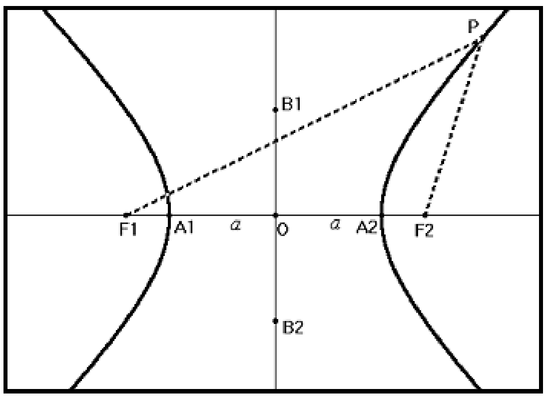


Proposición equivalente: la elipse es la envolvente de la familia de mediatrices del segmento $F_2 N$, donde el punto *N* describe la circunferencia con centro en F_1 y radio $2a$.

La hipérbola

Definición. La *hipérbola* es el lugar geométrico de todos los puntos P de un plano, tales que la *diferencia* de las distancias de P a dos puntos fijos del mismo plano F_1 y F_2 es una constante menor que la distancia entre los dos puntos fijos.

$$|\,\text{distancia}(P, F_1) - \text{distancia}(P, F_2)\,| = \text{constante}$$



Los elementos de una *hipérbola* son:

- Los puntos F_1 y F_2 son los *focos,* y el punto O es el *centro* de la hipérbola
- La distancia entre los focos $F_1F_2 = 2c$ es llamada *distancia focal.*
- La diferencia constante es $2a$, siendo $2a < 2c$.
- La recta que pasa por los focos intersecta a la hipérbola en dos puntos A_1 y A_2. Estos puntos son los *vértices* de la hipérbola.

- La recta A_1A_2 es *eje* de simetría de la curva, y el segmento A_1A_2 se llama *eje transverso* y mide $2a$.
- En la recta perpendicular a A_1A_2 que pasa por *O*, construir los puntos B_1 y B_2 tales que $B_1B_2 = 2b$, donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
- Los segmentos PF_1 y PF_2 se denominan *radios vectores*.

Observaciones.

a) Los parámetros a, b, c están relacionados mediante la ecuación: $a^2 + b^2 = c^2$.

b) La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$, es un número mayor que 1.

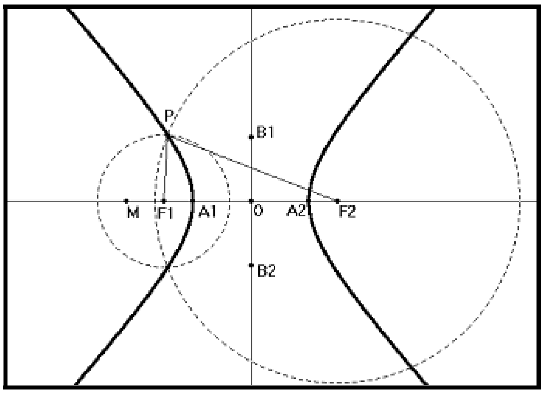
Cuando $a = b$, la hipérbola se dice equilátera. En este caso $e = \sqrt{2}$.

c) Una *hipérbola* tiene dos directrices.

Considerando las notaciones, una relación que describe la *hipérbola* como el conjunto de todos los puntos *P* tales que la distancia de *P* a F_1 y a F_2 es $2a$, es $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

Construcción de una hipérbola.

Construcción de puntos de una hipérbola: dados los focos F_1 y F_2 y la diferencia constante $2a$, tal que $F_1F_2 > 2a$.



- Construir la F_1F_2 y el punto medio O del segmento F_1F_2.
- Construir A_1 y A_2 del eje transverso mayor de la hipérbola.
- Crear un punto *M* en la recta A_1A_2, exterior al segmento F_1F_2 .
- Trazar la circunferencia con centro F_1 y radio MA_1, y la circunferencia con centro F_2 y radio MA_2.

  Los puntos de intersección de ambas circunferencias, son puntos de la hipérbola. Otros dos puntos de la elipse se obtienen construyendo las circunferencias con centro en F_1 y radio MA_2, y la circunferencia con centro en F_2 y radio $MA1$.
- Tomando nuevas posiciones de *M* en el la recta A_1A_2, se obtienen otros puntos de la hipérbola.

Esta construcción de puntos, se puede realizar con apoyo de un programa de geometría dinámica.

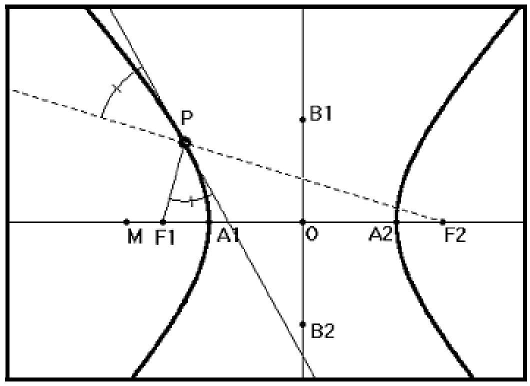
Propiedades de la hipérbola.

1. El eje A_1A_2 es eje de simetría, y el punto O es centro de simetría de la hipérbola.
2. La hipérbola se compone de dos ramas, que se alejan infinitamente del centro.

3. La recta tangente a una hipérbola en un punto P de la curva, es la bisectriz interior del ángulo F_1PF_2.

La recta normal a la hipérbola en el punto P, es la recta perpendicular a la tangente en el punto P.

Propiedad de reflexión de una hipérbola: *los ángulos que forman cada radio vector F_1P y F_2P con la recta tangente a la hipérbola en un punto P, son iguales.*

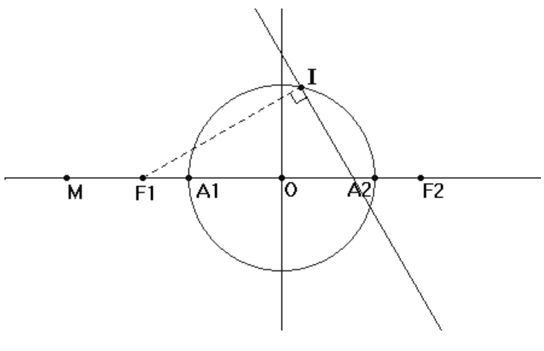


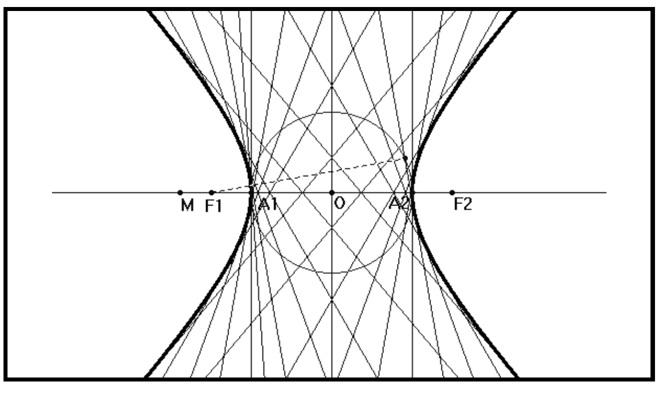
Una aplicación de esta propiedad: *Todo rayo luminoso (u onda sonora) que parte de un foco F_1, es reflejado por la hipérbola siguiendo una recta que pasa por el otro foco F_2.*

4. La ecuación reducida de una hipérbola cuyos focos son $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Las ecuaciones de las directrices de esta hipérbola son $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

5. Sean F un foco de una hipérbola, la recta D una directriz, y e la excentricidad (e>1). La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que $\frac{PF}{PH} = e$, donde H es la proyección ortogonal de P sobre la directriz D.

6. La hipérbola con focos F_1 y F_2, y eje transverso $2a$, es la *envolvente* de la familia de rectas perpendiculares a la recta F_1I en el punto I, donde el punto I describe la circunferencia con centro en O y radio a.



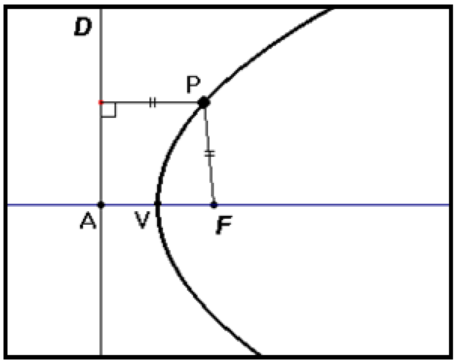


Proposición equivalente: la hipérbola es la envolvente de la familia de mediatrices del segmento F_1N, donde el punto N describe la circunferencia con centro en F_2 y radio $2a$.

La parábola

Definición. La *parábola* es el lugar geométrico de todos los puntos *P* de un plano, tales que las distancias de *P* a un punto fijo *F* y a una recta fija *D*, son iguales.

$$\text{distancia}(P, F) = \text{distancia}(P, D)$$



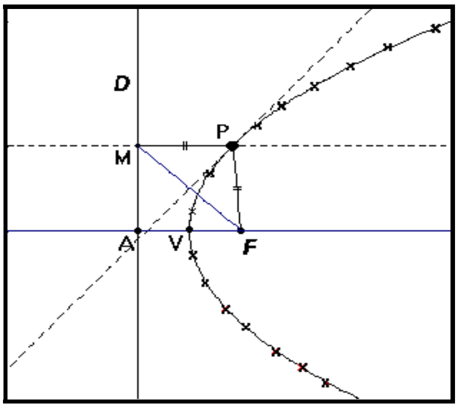
Los elementos de una parábola son:

- El punto F es el *foco* y la recta *D* es la *directriz* de la parábola.
- La recta perpendicular trazada por F a la directriz es el *eje* de la parábola (eje focal).
- El punto de intersección *V* del eje con la parábola es el *vértice* de la parábola
- La distancia del foco a la directriz se denota $2p$, siendo $VF = VA = p$.
- El segmento PF se denomina *radio vector* correspondiente al punto *P*

Construcción de una parábola

Construcción de puntos de una parábola, dados el foco F y la directriz *D*.

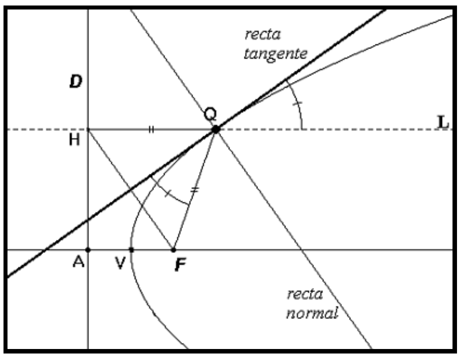
- Construir un punto *M* en la directriz *D*.
- Trazar por M la recta *L* perpendicular a *D*.
- Trazar la mediatriz del segmento *FM*.
- El punto de intersección P entre la recta L y la mediatriz de *FM*, es un punto de la parábola.
- Considerando otras posiciones de *M* en la recta *D*, se obtiene otros puntos de la parábola.



Propiedades de la parábola.

1. El eje de la parábola es eje de simetría.
2. La *recta tangente* a la parábola en un punto *Q*, es la mediatriz del segmento *FH*, donde *H* es el punto de intersección de la recta que pasa por Q perpendicular a *D*, y la recta *D*.

   La recta tangente en un punto *Q*, coincide con la bisectriz interior del ángulo *FQH*.

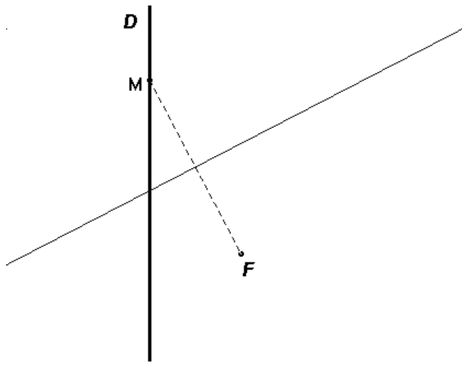


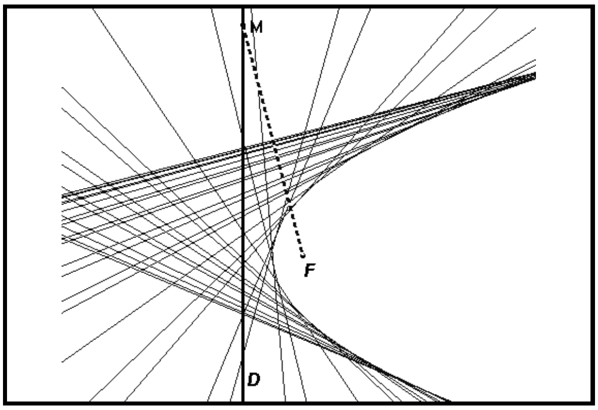
Propiedad de reflexión de una parábola: *los ángulos que forman el radio vector FQ con la recta tangente en Q, y el formado por la recta L con la recta tangente en Q,, son iguales.*

Una aplicación de esta propiedad: *Todo rayo luminoso (u onda sonora) paralela al eje de la parábola, es reflejado por la parábola siguiendo una recta que pasa por el foco F.*

3. La ecuación cartesiana reducida de una parábola cuyo foco es $F = (p, 0)$ y su vértice está en el origen del sistema, es $y^2 = 4px$, y la ecuación de la directriz es $x = -p$.

4. La parábola de foco F y directriz *D*, es la *envolvente* de la familia de mediatrices del segmento *FM*, donde el punto *M* describe la directriz *D*. Esta propiedad permite construir una parábola de manera aproximada.





Proposición equivalente: la parábola es la *envolvente* de la familia de rectas perpendiculares a la recta FJ en el punto *J*, donde el punto *J* describe la recta tangente a la parábola en el vértice *V* de ella.

Las cónicas como puntos que satisfacen una ecuación

La definición de una cónica como una curva algebraica de segundo grado, dada anteriormente, comprende las cónicas y los casos degenerados (conjunto vacío, un punto, una recta, dos rectas) y permite estudiarlas de manera global.

Sea $P(x, y) = 0$ la ecuación cartesiana de una cónica no degenerada.

a) Una ecuación reducida de una cónica es una ecuación simplificada que considera el centro (si es que tiene) de la cónica en el origen del sistema de coordenadas, y el eje focal en el eje de las abscisas. Partiendo de la ecuación general de una cónica se puede llegar a su ecuación reducida aplicando consecutivamente una rotación y una traslación adecuada.

b) La ecuación cartesiana de una cónica en un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen es un vértice de la cónica y eje de las abscisas el eje focal, siendo p la distancia del foco al vértice más próximo, con excentricidad e, se puede expresar:

$$y^2 = 2px(e+1) + (e^2-1)x^2$$

Por ejemplo, la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco el punto (p,0), su ecuación es $y^2 = 4px$, ya que $e = 1$.

c) En el caso de las cónicas con centro (elipse, hipérbola), considerando un sistema de coordenadas con origen en el centro de la cónica y eje de las abscisas en el eje focal, de la relación $e = \frac{a-p}{a} = \frac{c}{a}$. De esta relación se obtiene $p = a - ae$, y sustituyéndola en la ecuación de una cónica de la parte (b), se reduce a:

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)a^2 \quad \text{equivalente a} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Comentarios finales

No deja de deslumbrarnos y maravillarnos el trabajo realizado por los geómetras griegos de la antigüedad, en particular, el tratamiento de las cónicas realizado por el *Gran Geómetra Apolonio* basado esencialmente en relaciones métricas. Este trabajo sin embargo, permaneció intacto por casi dos mil años, y sólo ante los problemas planteados por el desarrollo de la Astronomía y de la Óptica en el siglo XVII, resurgió el interés por estas curvas, y consiguientemente, por la obra de Apolonio.

El desarrollo de la Geometría Analítica, permitió refrescar la obra de Apolonio, traduciendo en un principio su trabajo al lenguaje algebraico. Posteriormente, el desarrollo de la Geometría Proyectiva ha permitido expandir el desarrollo de las cónicas y descubrir nuevas propiedades de estas curvas.

Las cónicas constituyen uno de los conjuntos de curvas más importantes de la Geometría y que más se utilizan en distintas ramas de Ciencia e Ingeniería.

Bibliografía

[1] Chasles, M. [1865]. *Traité des sections coniques.* Imprimeur Gauthiers Villars.
[2] Courant, R., Robbins, H. [1996]. *¿Qué son las matemáticas?.* Fondo de Cultura Económica.
[3] Cuppens, R. [1999]. *Faire de la Geometrie superieure en jouant avec Cabri Geometre II.* Tome I. Publication APMEP. N° 124. Laboratoire Leibniz.
[4] González, M. [1965]. *Complemento de Geometría.* Minerva Books.
[5] Holzmuller, G. [1950]. *Tratado metódico de Matemáticas elementales.* Editorial Labor.